

Notas de Clase

Teoría Electromagnética



Neil Anais Torres López, MSc.

Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Física
Barranquilla
2005

Índice general

Prólogo	VII
1. Ecuaciones de Maxwell	3
1.1. Introducción	3
1.2. Carga Eléctrica	3
1.3. Ley de Coulomb	5
1.4. Teorema de Gauss	7
1.5. Polarización y Desplazamiento Eléctrico	10
1.6. Ley de Ampère	16
1.7. Magnetización y Campo Magnético	23
1.8. Ley de Inducción de Faraday	26
1.9. Corriente de Desplazamiento	27
1.10. Ecuaciones de Maxwell	28
1.11. Condiciones de Frontera	29
1.11.1. Caso Electrostático	29
1.11.2. Caso Magnetostático	30
1.12. Problemas	31
2. Electrostática en el Vacío	35
2.1. Introducción	35
2.2. Potencial Eléctrico	37
2.3. Ecuaciones de Poisson y Laplace	39
2.3.1. Introducción	39
2.3.2. Solución de la Ecuación de Poisson	40
2.3.3. Solución de la Ecuación de Laplace	44
2.4. Problemas	55
2.5. Problemas Varios de los Capítulos 1 y 2	57

3. Electrostática en la Materia	61
3.1. Introducción	61
3.2. Dieléctricos Lineales	62
3.3. Dieléctricos Lineales Isotrópicos	62
3.4. Dieléctricos Lineales Isotrópicos Homogéneos (l, i, h)	63
3.4.1. Ejemplo 1	64
3.4.2. Ejemplo 2	67
3.5. Cavidad. “Definiciones” de \mathbf{E} y \mathbf{D}	72
3.6. Energía Electroestática	75
3.6.1. Ejemplo 3	78
3.7. Problemas	79
3.8. Problemas Varios Capítulo 3	81
4. Campos y Corrientes Estacionarios	83
4.1. Introducción	83
4.2. Condiciones de Frontera	83
4.3. Magnetostática	88
4.3.1. Ejemplo 1	88
4.4. Potencial Escalar Magnético	90
4.5. Problemas con Valores en la Frontera	90
4.5.1. Ejemplo 2	90
4.5.2. Ejemplo 3	93
4.6. Potencial Vectorial Magnético	96
4.7. Inductancia y Energía Magnética	99
4.7.1. Ejemplo 4	101
4.8. Energía Magnetostática.	101
4.9. Problemas	103
4.10. Problemas Varios Capítulo 4	105
5. Ondas Electromagnéticas	107
5.1. Introducción	107
5.2. Ecuación de Onda	107
5.3. Ondas E.M. Planas en un Dieléctrico (l, i, h)	109
5.3.1. Solución de la Ecuación de Onda	110
5.4. Ondas E.M. Planas en un Conductor (l, i, h)	114
5.5. Potenciales Retardados	117
5.5.1. Solución de Ecuaciones de Onda	119
5.6. Flujo de Potencia E.M. y Vector de Poynting	121

5.7. Uso de los Campos Complejos	123
5.8. Flujo de Energía en una Onda E.M. Plana	125
5.9. Problemas	126
6. Propagación de Ondas E.M.	129
6.1. Introducción	129
6.2. Condiciones en la Frontera	129
6.3. R. y R. en la Frontera de dos Medios no Conductores. I.N.	134
6.4. R. y R. en la Frontera de dos Medios no Conductores. I.O.	138
6.5. Reflexión en un Plano Conductor. I.N.	142
A. Expresiones Matemáticas Importantes	147
A.1. Gradiente	147
A.2. Divergencia	148
A.3. Rotacional	148
A.4. Laplaciano	149
A.5. Teorema de la Divergencia	150
A.6. Teorema de Stokes	150
Agradecimientos	153

Prólogo

Los tiempos han cambiado, y hoy el interés principal se centra en los orígenes, propiedades y naturaleza de los campos electromagnéticos, es decir, de las cantidades eléctricas y magnéticas vectoriales que se definen en función del tiempo y de la posición en el espacio. Las fuerzas y sus conceptos relacionados, tales como la energía, no ha dejado desde luego de tener importancia y es conveniente iniciar el estudio con las fuerzas y definir los vectores de campo en función de ellas. Sin embargo, la intención principal consiste en expresar las discrepancias de los fenómenos en función de los campos de una manera tan completa como sea posible. Este énfasis sobre los campos ha demostrado ser de gran utilidad, y resulta ahora difícil de imaginar cómo se hubiera podido desarrollar la teoría electromagnética hasta su actual nivel sin el uso de los campos.

Estas Notas constituyen el contenido del curso de Teoría Electromagnética que se imparte en la Especialización en Física General y en el pregrado en Física de la Universidad del Atlántico. El curso comienza con la presentación de las ecuaciones de Maxwell, luego se aplican para el espacio libre y para medios con propiedades eléctricas y magnéticas bien definidas, se culmina resolviendo las ecuaciones para llegar a las ondas electromagnéticas y su propagación en diferentes medios. Para una mejor comprensión del desarrollo de este curso es necesario tener muy claro los conocimientos básicos del análisis vectorial, un resumen de lo que necesita se presenta en el apéndice A. Se supone además que el estudiante está familiarizado con los aspectos y los fenómenos elementales de la Electricidad y del Magnetismo: Ley de Coulomb, Inducción electromagnética, campos magnéticos creados por corrientes eléctricas, fuerza de Lorentz, etc. Sin embargo se revisaran algunos conceptos básicos.

Es necesario aclarar que temas muy importantes como el Método de Imágenes para la solución de problemas electrostáticos y la Propagación de Ondas

Electromagnéticas en guías de onda y líneas de transmisión serán desarrollados como trabajo independiente de los estudiantes.

Estas notas están diseñadas tomado como fuente varios autores y así facilitar el trabajo para los estudiantes, pero el autor agradece cualquier sugerencia por parte de colegas y estudiantes para mejorarlas.

NEIL TORRES LÓPEZ
ntorres@uniatlantico.edu.co
torresneil@hotmail.com

Barranquilla, junio de 2005

...Faraday visualizaba líneas de fuerza que atravesaban todo el espacio donde los matemáticos sólo veían centros de fuerza que actuaban a distancia; Faraday veía un medio donde ellos únicamente veían distancia; Faraday buscó la fuente de los fenómenos a partir de acciones reales que se llevaban a cabo en el medio, mientras aquéllos quedaron satisfechos con haberla encontrado en el poder de acción a distancia de los fluidos eléctricos.

**- J. C. Maxwell,
Tratado de Electricidad y Magnetismo**

Capítulo 1

Ecuaciones de Maxwell

1.1. Introducción

Las cuatro ecuaciones que se van estudiar, denominadas ecuaciones de Maxwell, representan una generalización de algunas observaciones experimentales. Sin embargo, la aplicabilidad a cualquier situación puede ser verificada. Como resultado del extenso trabajo experimental, se sabe ahora que las ecuaciones de Maxwell se aplican a casi todas las situaciones macroscópicas y se usan generalmente, como la conservación del momentum, como principio guía.

1.2. Carga Eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad fundamental y característica de las partículas elementales que forman la materia. Todo material está compuesto fundamentalmente por protones, neutrones y electrones, y dos de estas partículas tienen carga.

Existen dos y sólo dos tipos de carga, la positiva que reside en los protones y la negativa que reside en los electrones; los neutrones no tienen carga. Cada electrón y protón, en valor absoluto, la carga elemental $e = 1,60217733 \times 10^{-19}$ C. La carga eléctrica está “cuantizada”, es decir toda carga existente en la naturaleza es un múltiplo entero de la carga elemental.

Es una observación experimental que la carga no puede crearse ni destruirse; la carga total en un sistema cerrado no puede cambiar, desde un punto de vista macroscópico las cargas pueden reagruparse y combinarse en distintas formas; sin embargo, se puede establecer que la carga neta se conserva en

un sistema cerrado; esto se conoce como el *Principio de Conservación de la Carga* y está determinado por la *Ecuación de Continuidad* que se deduce a continuación.

Se sabe que la densidad de corriente está relacionada con la densidad volumétrica de carga por:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (1.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga. Por otro lado se tiene que la corriente que atraviesa una superficie S es

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \quad (1.2)$$

Considerando una superficie cerrada S arbitraria que limita a un volumen V , la corriente será

$$I = - \iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \quad (1.3)$$

el signo menos se debe a que $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal hacia afuera y se desea considerar que I es positiva cuando el flujo neto de carga es del exterior al interior de V . Utilizando el teorema de la divergencia se tiene

$$I = - \iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv \quad (1.4)$$

además

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dv \quad (1.5)$$

de la dos últimas ecuaciones se llega a

$$- \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dv \implies \iiint_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0.$$

Como V es un volumen arbitrario, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación de Continuidad} \quad (1.6)$$

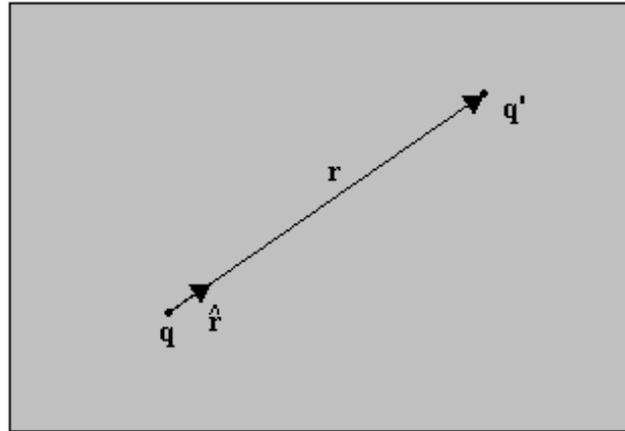


Figura 1.1: Sistema de dos cargas puntuales q y q'

1.3. Ley de Coulomb

Hacia fines del siglo XVIII las técnicas experimentales de la ciencia lograron suficiente perfeccionamiento para hacer posible observaciones refinadas de las fuerzas entre cargas eléctricas. Los resultados de estas observaciones, que eran extremadamente discutidas en aquella época, pueden resumirse en tres expresiones:

- *Hay dos y sólo dos tipos de carga, conocidas ahora como positiva y negativa.*
- *Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que actúan sobre la línea que las une y que son inversamente proporcionales del cuadrado de su distancia de separación.*
- *Estas fuerzas son también proporcionales al producto de las cargas, son repulsivas para cargas del mismo tipo, y atractivas para cargas de tipos contrarias.*

Las dos últimas expresiones, con la primera como preámbulo, se conocen como *Ley de Coulomb* en honor a **Charles Augustin Coulomb**, quien fue uno de los destacados estudiantes de electricidad del siglo XVIII.

Esto se puede expresar, utilizando la figura 1.1, como

$$\mathbf{F}_{q'} = k \frac{qq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = k \frac{qq' \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.7)$$

La constante de proporcionalidad k es $k = 8,98755 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, también puede expresarse como, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del

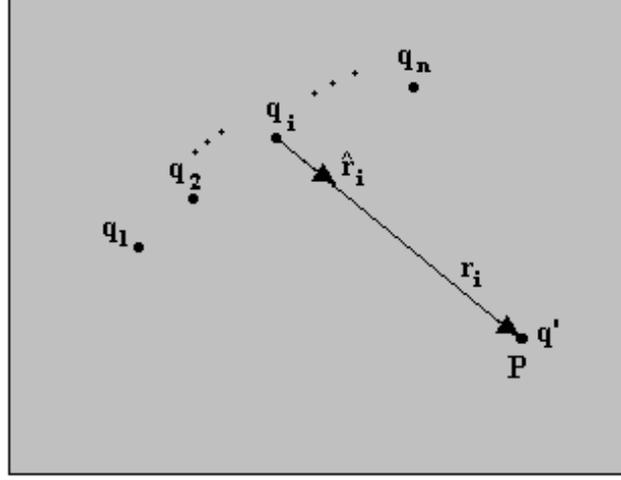


Figura 1.2: Sistema de n cargas puntuales que interactúan con la carga q' .

espacio libre, $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$. Ahora se puede escribir la ley de Coulomb de la siguiente manera

$$\mathbf{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.8)$$

Cuando se tiene un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, como el que se muestra en figura 1.2, se puede hallar la fuerza sobre la carga q' superponiendo la n fuerzas

$$\mathbf{F}_{q'} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q' \mathbf{r}_i}{r_i^3} = q' \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (1.9)$$

Se define el campo eléctrico \mathbf{E} como la fuerza por unidad de carga

$$\mathbf{F}_{q'} = q' \mathbf{E} \quad (1.10)$$

comparando con la ecuación 1.9 se llega a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} \quad (1.11)$$

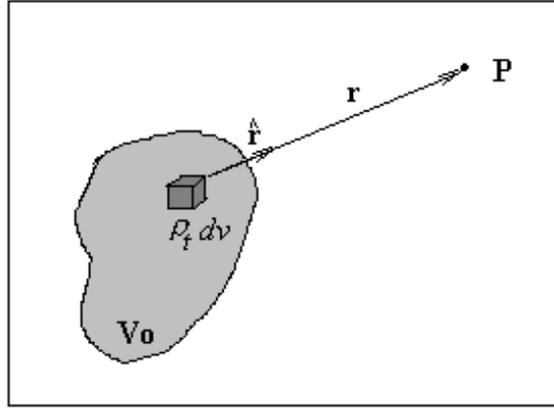


Figura 1.3: Distribución continua de carga en un volumen V_0 , donde ρ_t es la densidad volumétrica de carga eléctrica, también se puede dar el caso de estar distribuida en una superficie o un hilo.

Para una distribución continua de carga, como en la figura 1.3, se tiene que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{\rho_t \hat{\mathbf{r}} dv}{r^2} \quad (1.12)$$

1.4. Teorema de Gauss

En esta sección se demostrará que

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (1.13)$$

donde $Q = \sum_i q_i$ es igual a la carga total contenida en un volumen V limitado

por la superficie cerrada S , como se muestra en la figura 1.4

Se utiliza la ecuación 1.11 para escribir

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \iint_{S, \text{ cerrada}} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{a}}{r_i^2} \quad (1.14)$$

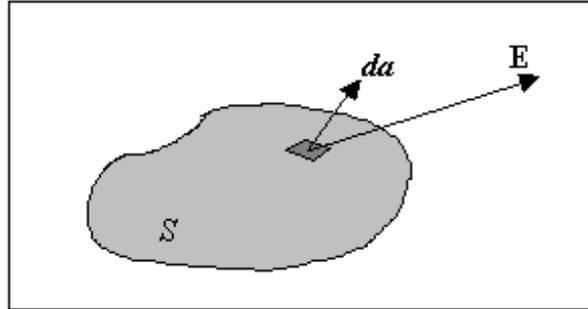


Figura 1.4: Una superficie cerrada S que limita un volumen V , donde reside una carga eléctrica neta Q .

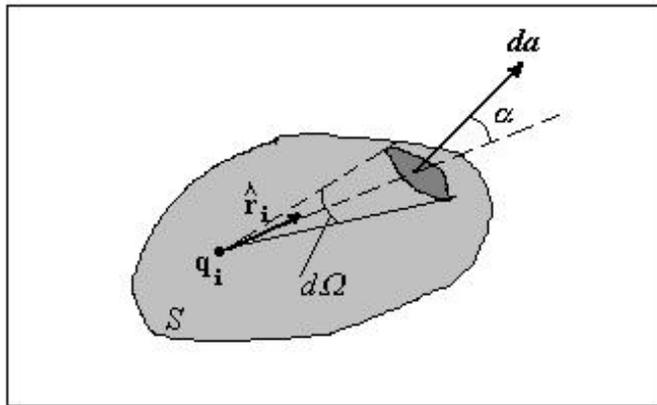


Figura 1.5: Evaluación del teorema de Gauss en el caso en que la carga q_i esté dentro de la superficie cerrada S .

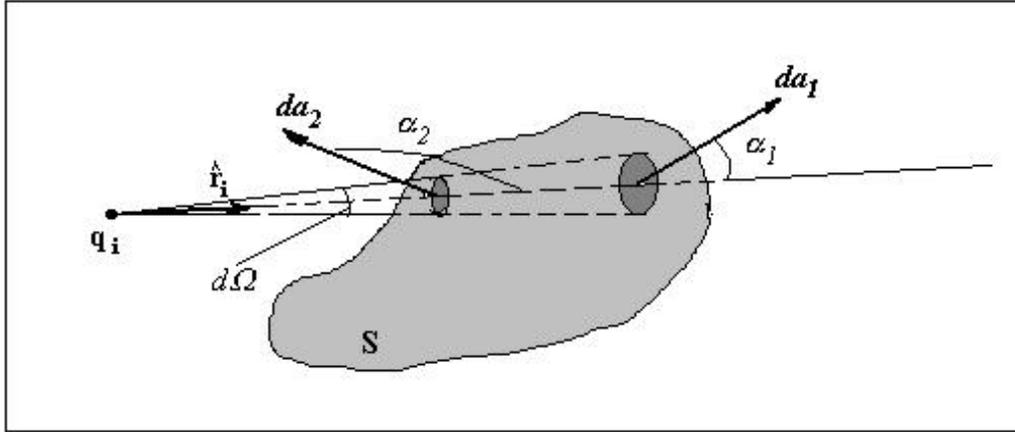


Figura 1.6: Evaluación del teorema de Gauss cuando la carga q_i esté en el exterior de la superficie cerrada S .

Considerando el caso en que q_i esté dentro de la superficie cerrada S , ver figura 1.5

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{a}}{r_i^2} = \frac{da \cos \alpha}{r_i^2} = \frac{\text{área} \perp a r_i}{r_i^2} = d\Omega$$

este es elemento de ángulo sólido subtendido por $d\mathbf{a}$ a partir de q_i .

Por lo tanto

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{a}}{r_i^2} = \iint_{S, \text{ cerrada}} d\Omega = 4\pi \quad (1.15)$$

Considerando el caso en que q_i esté en el exterior de la superficie cerrada S , como se observa en la figura 1.6

En este caso tenemos dos elementos de área $d\mathbf{a}_1$ y $d\mathbf{a}_2$ cada uno de los cuales sustituye el mismo ángulo sólido $d\Omega$ respecto a la carga q_i . Sin embargo, para $d\mathbf{a}_2$ el sentido es hacia q_i , mientras que para $d\mathbf{a}_1$ es alejarse de q_i . Por consiguiente, las contribuciones de $d\mathbf{a}_1$ y $d\mathbf{a}_2$ son iguales y opuestas, o sea

$$\frac{d\mathbf{a}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_i}{r_{i1}^2} = d\Omega = -\frac{d\mathbf{a}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_i}{r_{i2}^2} \quad (1.16)$$

por lo que la integral total

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{a}}{r_i^2} = 0 \quad (1.17)$$

tomando los resultados obtenidos en las ecuaciones 1.14, 1.15 y 1.17 escribimos

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{Dentro} q_i \iint_{S, \text{ cerrada}} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{a}}{r_i^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{Dentro} q_i = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.18)$$

pero se sabe que

$$Q = \iiint_V \rho_t dv$$

donde V es el volumen limitado por la superficie cerrada S , entonces

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_t dv \quad (1.19)$$

Utilizando el teorema de la divergencia, se llega a:

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_t dv = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv.$$

Como V es un volumen arbitrario, se puede escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

1.5. Polarización y Desplazamiento Eléctrico

Hasta ahora, no se ha considerado el caso en que intervienen dieléctricos. Un material dieléctrico ideal es el que no contiene cargas libres. Sin embargo, todos los medios materiales se componen de moléculas, éstas a su vez se componen de entes cargados (núcleos y electrones atómicos), y las moléculas de los dieléctricos son de hecho afectadas por la presencia de un campo eléctrico.

El campo eléctrico produce una fuerza sobre cada partícula cargada, siendo impulsadas las partículas de carga positiva en la dirección del campo, y las negativas en dirección opuesta, de modo que las partes positivas y negativas de cada molécula se desplazan en sus posiciones de equilibrio en direcciones

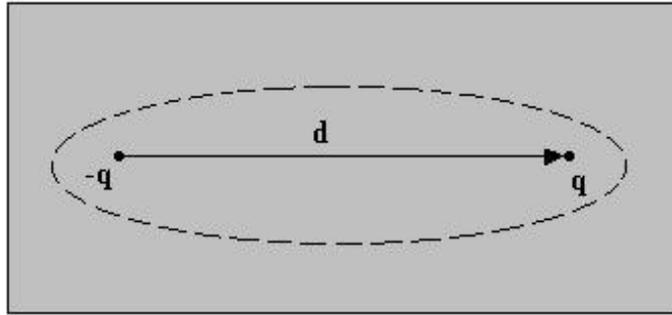


Figura 1.7: El centro de la carga positiva sufre un desplazamiento \mathbf{d} con respecto al centro de la carga negativa en la misma dirección del campo eléctrico externo, una configuración como esta constituye un dipolo eléctrico.

opuestas, conformando así los dipolos eléctricos, como el que se muestra en la figura 1.7, a los cuales se le define el momento dipolar eléctrico como

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (1.21)$$

No obstante, estos desplazamientos están limitados (en la mayoría de los casos a fracciones muy pequeñas de un diámetro molecular) por intensas fuerzas restauradoras que se forman por el cambio de la configuración de la carga de la molécula. El efecto total desde el punto de vista macrocópico se visualiza con mayor claridad como un desplazamiento de toda la carga positiva en el dieléctrico con relación a la carga negativa. Se dice que el dieléctrico está *polarizado*.

Se define el vector polarización eléctrica como el promedio de los dipolos por unidad de volumen. Por ejemplo si se tienen N moléculas en un volumen V de momento dipolar \mathbf{p} , entonces la polarización es

$$\mathbf{P} = \frac{N\mathbf{p}}{V} \quad (1.22)$$

Cuando la polarización es uniforme, la densidad promedio de carga positiva es numéricamente igual a la densidad de carga negativa y por lo tanto la densidad de carga es cero. Cuando P no es uniforme las densidades de carga positiva y negativa no se cancelan resultando así una densidad de carga neta, denominada ρ_p : *densidad de carga ligada o de polarización*.

Cuando en un material hay tanto la densidad de carga libre ρ y la densidad de carga ligada ρ_p , la densidad de carga total es

$$\rho_t = \rho + \rho_p \quad (1.23)$$

Por lo tanto la ecuación 1.20 se puede escribir como

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho + \rho_p \quad (1.24)$$

Se encontrará ahora la relación entre ρ_p y la polarización \mathbf{P} ; se definen dos densidades de carga ρ^+ y ρ^- como las que representan la carga total positiva y la carga total negativa por unidad de volumen, respectivamente. Esto es ρ^+ representa todos los núcleos atómicos en la unidad de volumen del material y, semejantemente, ρ^- tiene en cuenta todos los electrones.

En el estado no polarizado, cada elemento de volumen del dieléctrico es eléctricamente neutro, por tanto

$$\rho_0^+ + \rho_0^- = 0 \quad (1.25)$$

donde el subíndice 0 representa las densidades en la configuración no polarizada.

Suponiendo, que como consecuencia de la polarización la carga positiva se desplaza $\vec{\delta}^+(x, y, z)$ y la negativa $\vec{\delta}^-(x, y, z)$. La carga positiva que atraviesa un elemento de área $d\mathbf{a}$ es $\rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot d\mathbf{a}$ y así el aumento de carga positiva en el elemento de volumen Δv durante el proceso de polarización es

$$- \iint_{\Delta S, \text{ cerrada}} \rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot d\mathbf{a}$$

donde ΔS es la superficie cerrada que limita a Δv . Análogamente, el desplazamiento de la carga negativa aumenta la carga (disminuye la carga negativa)

$$\iint_{\Delta S, \text{ cerrada}} (-\rho_0^-) \vec{\delta}^- \cdot d\mathbf{a}$$

Por lo que el aumento total de la carga por el elemento de volumen Δv , teniendo en cuenta la ecuación 1.23, es

$$\begin{aligned} \Delta Q_p &= - \iint_{\Delta S} \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot d\mathbf{a} = - \iiint_{\Delta v} \nabla \cdot [\rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)] dv = \\ &= - \nabla \cdot [\rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)] \Delta v \end{aligned}$$

y como podemos identificar a \mathbf{P} como

$$\mathbf{P} = \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)$$

lo cual quiere decir que $\rho_p = \frac{\Delta Q_p}{\Delta v}$, entonces

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.26)$$

Al remplazar en la ecuación 1.24, se obtiene $\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$ o sea

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

donde ρ es la densidad de carga libre. Es conveniente definir el vector *Desplazamiento Eléctrico*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.27)$$

de tal manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.28)$$

esta es la llamada *Ley de Gauss* en forma diferencial, es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

A continuación se analiza otra consecuencia de la ley de Coulomb, para lo cual se calcula la integral de línea del campo eléctrico producido por un sistema de cargas puntuales desde el punto 1 hasta el punto 2 de la figura 1.8

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \int_1^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{l}}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \int_1^2 \frac{dr_i}{r_i^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{r_{i2}} - \frac{1}{r_{i1}} \right) \quad (1.29)$$

Este resultado nos indica que la integral de línea es independiente del camino, cuando $r_{i2} = r_{i1}$ se tiene que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

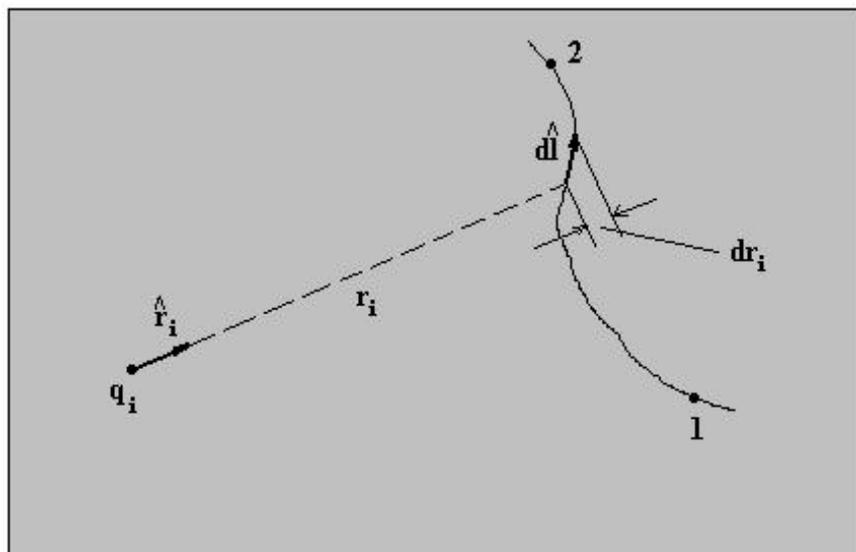


Figura 1.8: Trayectoria arbitraria entre los puntos 1 y 2 para comprobar que el campo eléctrico, producido por un sistema de cargas puntuales, es conservativo.

entonces aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

y como S es una superficie arbitraria, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.30)$$

o sea el campo eléctrico dado por la ley de Coulomb es conservativo. Por consiguiente se puede escribir

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (1.31)$$

donde Φ es la función potencial, además se observa que

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 d\Phi = -(\Phi_2 - \Phi_1)$$

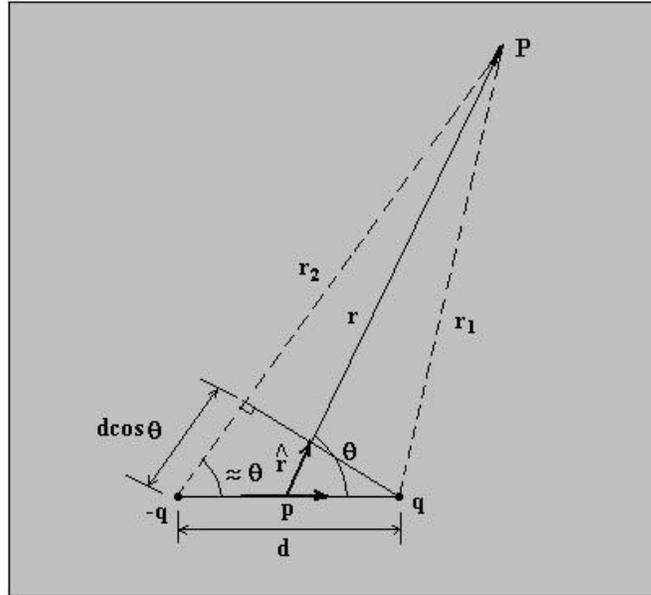


Figura 1.9: Dipolo eléctrico, el potencial se calcula para puntos que cumplen que $r \gg d$.

comparando con la ecuación 1.29 se llega a

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (1.32)$$

expresión que representa el potencial para un sistema de cargas puntuales en un punto exterior P , r_i representa la distancia de i -ésima carga q_i al punto P . Similarmente como se procedió por el campo eléctrico para extender la expresión anterior al caso de una distribución continua de carga, con densidad de carga ρ_t

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{\rho_t dv}{r} \quad (1.33)$$

Ejemplo: Potencial de un dipolo eléctrico

Se considera que el punto P de la figura 1.9 se encuentra alejado del dipolo es decir $r \gg d$. El potencial viene expresado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

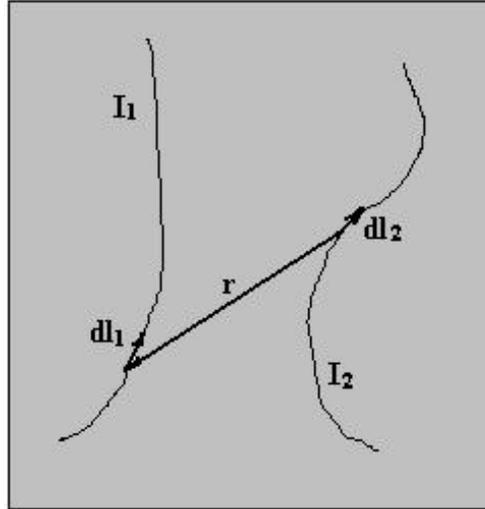


Figura 1.10: Diagrama para calcular las fuerzas entre corrientes.

De la figura 1.9 podemos aproximar: $r_2 - r_1 \approx d \cos \theta$ y $r_1 r_2 \approx r^2$; entonces

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

como

$$p = qd \implies \Phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2};$$

por lo tanto

$$\Phi_{dipolo} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.34)$$

1.6. Ley de Ampère

Ampère estudió las fuerzas entre corrientes cerradas, atendiendo a ese resultado podemos escribir que la fuerza entre elementos infinitesimales, ver figura 1.10, es

$$d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r})]}{r^3} \quad (1.35)$$

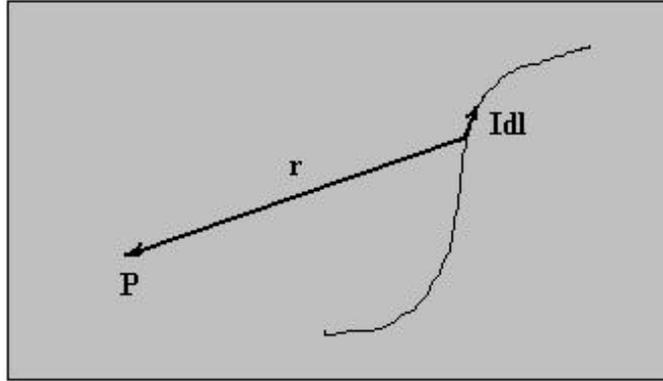


Figura 1.11: Manera como se calcula la inducción magnética B en un punto P producido por circuito filamentoario.

donde $d(\mathbf{F}_1)$ es la fuerza sobre el elemento de corriente $I_1 d\mathbf{l}_1$ debido al elemento de corriente $I_2 d\mathbf{l}_2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$. La fuerza total sobre el elemento $I_1 d\mathbf{l}_1$ es

$$d\mathbf{F}_1 = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \oint_c \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.36)$$

Definimos la inducción magnética \mathbf{B} como

$$d\mathbf{F}_1 = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} \quad (1.37)$$

entonces

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.38)$$

donde la integral debe realizarse sobre un circuito completo y se obtiene la inducción magnética en un punto P , como se ilustra en la figura 1.11

Considerando que la corriente I está constituida por portadores de carga q con velocidad \mathbf{v} que pasan por el área A en un tiempo dt , como se ilustra en la figura 1.12

$$(\rho A v) dl = Idl = (\rho A dl) v = qv$$

por lo que se puede escribir

$$Id\mathbf{l} = q\mathbf{v} \quad (1.39)$$

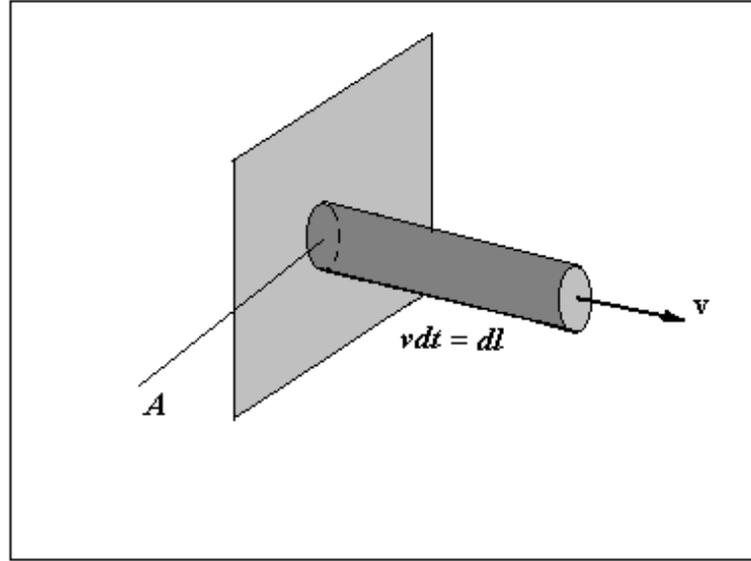


Figura 1.12: Portadores de carga q y velocidad v que atraviesan un área A en el tiempo dt .

Por lo que la fuerza magnética será

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.40)$$

En una región donde exista tanto campo magnético como campo eléctrico, la fuerza total llamada *fuerza de Lorentz*.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.41)$$

Regresando a la ecuación 1.38, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I \nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (1.42)$$

Si se utiliza la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

para este caso se tiene

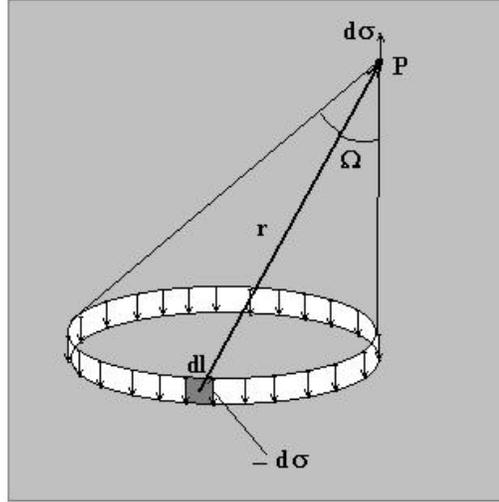


Figura 1.13: Circuito cerrado que produce una inducción magnética B en el punto P .

$$\nabla \cdot \left(d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \times d\mathbf{l} - d\mathbf{l} \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

como $d\mathbf{l}$ no depende de las coordenadas $\nabla \times d\mathbf{l} = \mathbf{0}$, por lo que la ecuación 1.42 se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I d\mathbf{l} \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (1.43)$$

pero se puede verificar que $\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.44)$$

conocida como la *ley de Gauss para el magnetismo*, en su forma diferencial; esta es otra de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Se procede ahora a la evaluación del rotacional de \mathbf{B} , considerando un circuito cerrado que produce una inducción magnética \mathbf{B} en el punto P , como el mostrado en la figura 1.13

Sea Ω el ángulo sólido subtendido por el punto P y el circuito. Suponiendo que se produce un desplazamiento $d\sigma$ del punto P ; el cambio de ángulo sólido $d\Omega$ debido a este desplazamiento, lo podemos considerar como la suma de los ángulos sólidos subtendidos por los rectángulos formados por $d\mathbf{l}$ y $-d\sigma$, o sea

$$d\Omega = \sum \frac{(-d\boldsymbol{\sigma} \times d\mathbf{l}) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)}{r^2} \longrightarrow -d\boldsymbol{\sigma} \cdot \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \nabla \Omega \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

como se puede apreciar Ω debe ser evaluado en el punto P y además

$$\nabla \Omega = - \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

introduciendo este resultado en la ecuación 1.38, se llega a

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left(\frac{I\Omega}{4\pi} \right) = -\mu_0 \nabla \Phi_m \quad (1.45)$$

O sea que la inducción magnética se escribe como el negativo del gradiente de una cantidad escalar. La cantidad $\Phi_m = \frac{I\Omega}{4\pi}$ se denomina potencial escalar magnético. Para este caso $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, pero este resultado no es general, como se vera a continuación.

Utilizando la ecuación 1.45 se tiene

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \nabla \Omega \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\Omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega$$

donde $\Delta\Omega$ es la varación del ángulo sólido al realizarse la integración. Pueden suceder dos casos:

Primer Caso. Suponiendo que el camino de integración es el mostrado en la figura 1.14

En tal caso el ángulo inicial es el mismo final, entonces $\Delta\Omega = 0$, de tal manera que utilizando el teorema de stokes

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

de donde se deduce que $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$

Segundo Caso. Suponiendo que la trayectoria de integración envuelve a la corriente, por simplicidad se supone que partimos de A y llegas a B , como se muestra en la figura 1.15

En el punto $A : \Omega = 2\pi$ y en $B, \Omega = -2\pi$. Lo cual conduce a que

$$\Delta\Omega = (-2\pi) - 2\pi = -4\pi$$

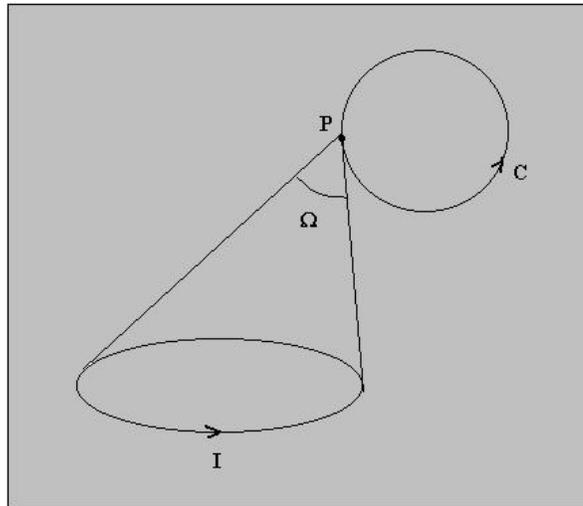


Figura 1.14: El camino C de integración no enlaza la corriente I

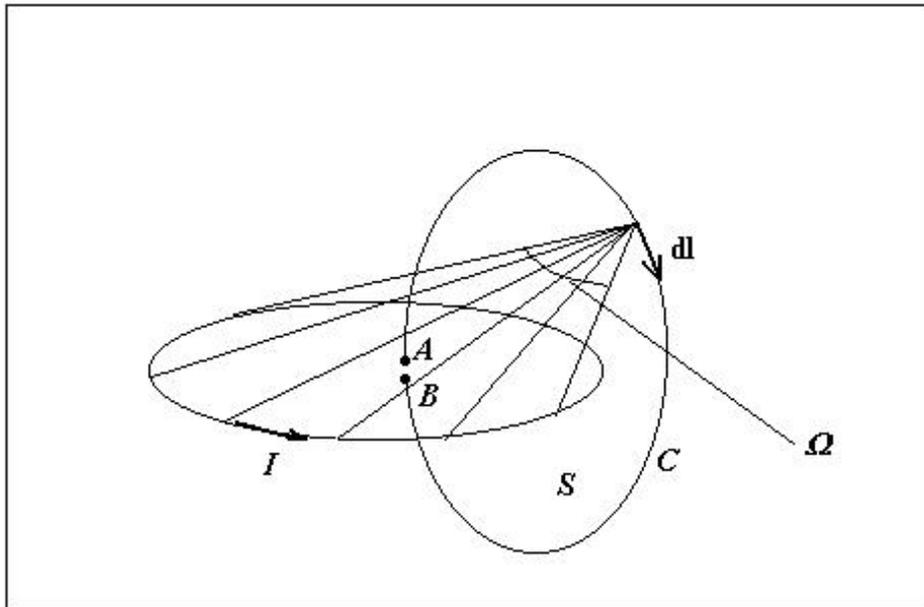


Figura 1.15: El camino C de integración enlaza la corriente I

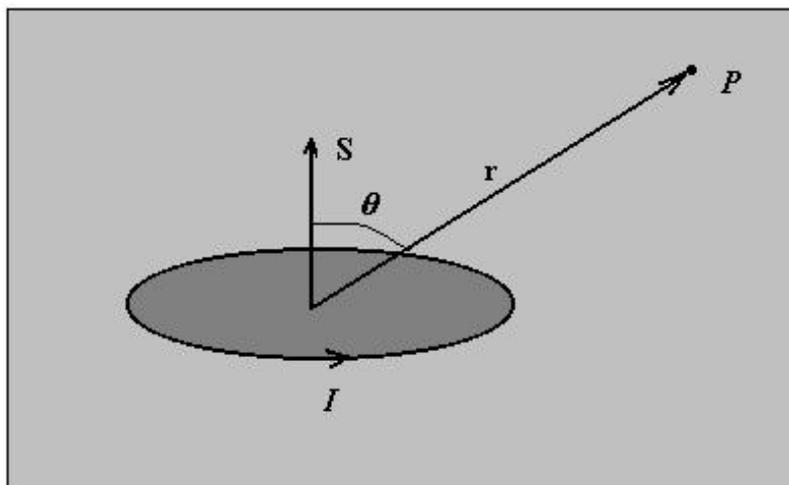


Figura 1.16: Espira circular de corriente, se considera un dipolo magnético.

De al manera que se obtiene

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.46)$$

donde I es la corriente encerrada por la trayectoria C . Por otro lado se sabe que $I = \iint_S \mathbf{J}_t \cdot \hat{\mathbf{n}} da$, siendo \mathbf{J}_t la densidad de corriente total, de tal manera que

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}_t \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Concluyendo entonces

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t \quad (1.47)$$

esta ecuación se conoce como la *Ley de Ampère*, en su forma diferencial.

Ejemplo. Dipolo magnético.

El potencial escalar magnético debido a una espira de corriente, figura 1.16, se expresa como:

$$\Phi_m = \frac{I\Omega}{4\pi} = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{S \cos \theta}{r^2} \right)$$

entonces

$$\Phi_m = \frac{(IS) \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (1.48)$$

Definimos el momento dipolar magnético como

$$\mathbf{m} = IS \quad (1.49)$$

de donde se llega a

$$\Phi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (1.50)$$

similar a la expresión de la ecuación 1.34 del dipolo eléctrico, es por esto que en este caso se habla de dipolo magnético.

1.7. Magnetización y Campo Magnético

Toda materia consiste fundamentalmente en átomos y cada átomo consiste en electrones en movimiento. Estos circuitos de electrones, cada uno de los cuales está confinado a un sólo átomo, son las que llamaremos corrientes atómicas. De tal manera que se tienen dos clases de corrientes: **i.** Una corriente verdadera que consiste en transporte de carga, esto es, el movimiento de electrones libres o de iones cargados y **ii.** Corriente atómicas, que son corrientes puras que circulan sin dar origen a transporte de carga; sin embargo, ambas clases de corrientes pueden producir campo magnético.

Una corriente I que circula alrededor de una trayectoria que encierra un área vectorial diferencial $d\mathbf{S}$, define el momento dipolar magnético

$$\mathbf{m} = Id\mathbf{S} \quad (1.51)$$

Si hay n dipolos por unidad de volumen y se considera el volumen Δv , el momento dipolar magnético total es

$$\mathbf{m}_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (1.52)$$

Se define la magnetización \mathbf{M} como el momento dipolar magnético por unidad de volumen

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (1.53)$$

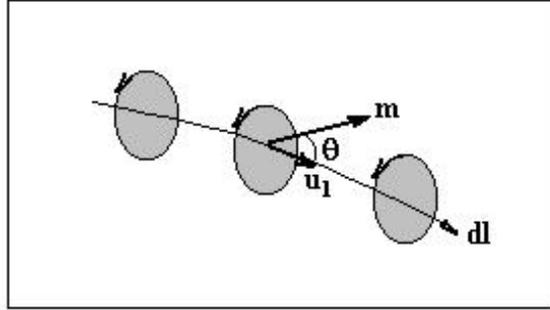


Figura 1.17: Varios dipolos magnéticos de momento \mathbf{m} enlazados por el elemento de trayectoria $d\mathbf{l}$.

La figura 1.17 muestra varios dipolos magnéticos \mathbf{m} que forman un ángulo θ con el elemento de trayectoria $d\mathbf{l}$, cada momento consta de una corriente I que circula alrededor del área $d\mathbf{S}$. Se está considerando por lo tanto un volumen pequeño $dS \cos \theta dl$ o sea $d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}$ dentro del cual hay $n d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}$ dipolos magnéticos. Al cambiar una orientación arbitraria a este alineamiento parcial, la corriente ligada que cruza la superficie encerrada por la trayectoria (hacia la izquierda cuando se recorre en la dirección $\hat{\mathbf{u}}_l$) se ha incrementado en I para cada uno de los $n d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}$ dipolos. Entonces

$$dI_m = n I d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

por lo tanto

$$I_m = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

o también

$$I_m = \iint_S \mathbf{J}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

entonces

$$\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

y aplicando el teorema de stokes

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iint_S \mathbf{J}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

de donde se llega a

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.54)$$

\mathbf{J}_m se denomina densidad de corriente de magnetización o ligada. Como se sabe de la ecuación 1.47

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t \text{ y } \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m$$

pudiendose escribir que:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}$$

o sea que

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

definimos (para que se siga cumpliendo la ecuación rotacional) el vector *Intensidad del campo magnético* como

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.55)$$

Se puede escribir la ley de Ampère para cualquier medio de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.56)$$

en este caso \mathbf{J} es la densidad de corriente libre o no ligada. De las ecuaciones 1.44 y 1. 55 se llega a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M})$$

entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.57)$$

Haciendo una analogía con la ecuación 1.26 se puede definir la cantidad ρ_m como la *densidad de polo magnético* como:

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.58)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m \quad (1.59)$$

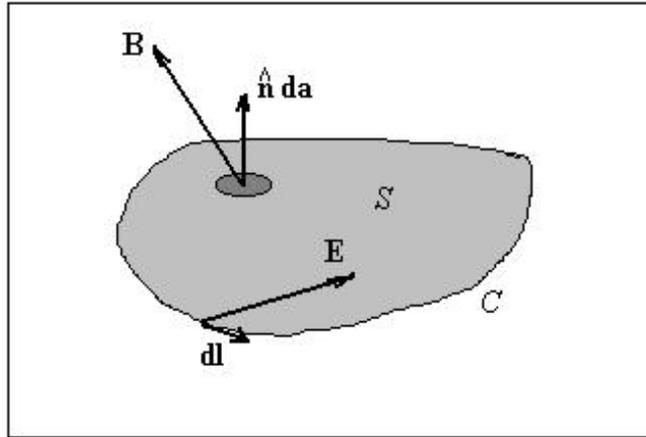


Figura 1.18: Diagrama que ilustra la ley de Faraday.

1.8. Ley de Inducción de Faraday

Los resultados de un gran número de experimentos pueden resumirse asociado una f.e.m. con el cambio de flujo magnético. Este resultado se conoce como la ley de Faraday que dice:

Todo flujo magnético variable en el tiempo que atraviesa un circuito, induce en este una f.e.m. proporcional a la rapidez de variación del flujo magnético.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1.60)$$

teniendo como referencia la figura 1.18

$$\Phi_m = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \text{ y } \varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

pudiendo escribir la ley de Faraday como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (1.61)$$

donde C es la curva que limita la superficie S . Si se aplica el teorema de Stokes se escribe entonces

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

de tal manera que

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.62)$$

esta ecuación es la *ley de Faraday* en su forma diferencial, y es otra de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

1.9. Corriente de Desplazamiento

Maxwell encontró que existía una contradicción entre la ley de Ampère (ecuación 1.56) y la ecuación de continuidad (ecuación 1.6), lo que lo condujo a introducir un término llamado *corriente de desplazamiento*, esto lo hizo teóricamente sin ninguna experimentación y fue comprobada muchos años después. Se vera a continuación dicha contradicción.

Como se sabe la divergencia de un rotacional es cero y de las ecuaciones 1.56 y 1.6 se tiene:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

Maxwell resolvió esta contradicción cuando introdujo un término adicional a la ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \quad (1.63)$$

Al calcular la divergencia a esta ecuación

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d = 0$$

ahora partiendo de la ecuación de continuidad (ecuación 1.6)

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = - \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Usando la ecuación 1.28 se escribe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

de tal manera

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

o sea que se puede escribir que

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.64)$$

densidad de corriente de desplazamiento. Reemplazando en la ecuación 1.63

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.65)$$

es conocida como la *ley de Ampère-Maxwell* en su forma diferencial y es la última de las ecuaciones de Maxwell.

1.10. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo se pueden resumir en las llamadas ecuaciones de Maxwell, deducidas en este capítulo.

TABLA 1.1
ECUACIONES DE MAXWELL

N°	Nombre	Expresión	N° de la Ec.
1	<i>Ley de Gauss- Caso eléctrico</i>	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	1. 28
2	<i>Ley de Faraday</i>	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	1. 62
3	<i>Ley de Gauss- Caso magnético</i>	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	1. 44
4	<i>Ley de Ampère Maxwell</i>	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	1. 65

Existen otras expresiones complementarias

TABLA 1.2
RELACIONES ENTRE LOS VECTORES DE CAMPO

N°	Expresión	N° de la Ec.
1	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	1. 27
2	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	1. 55

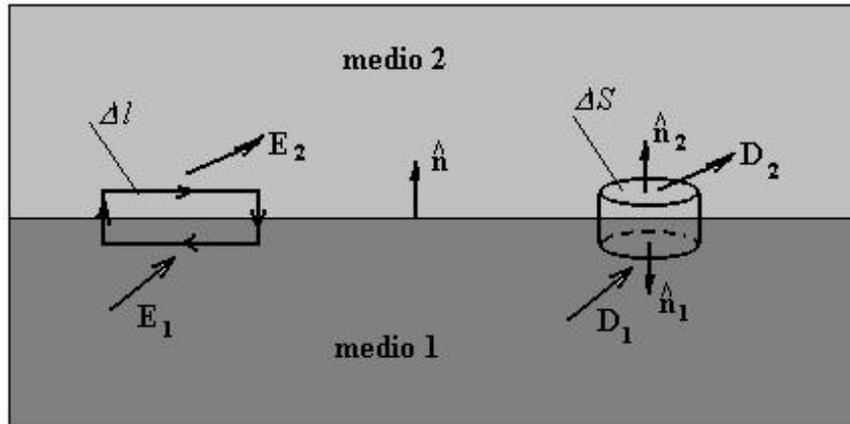


Figura 1.19: Condiciones de frontera electrostáticas para los medios 1 y 2, se ha tomado el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ el que se dirige del medio 1 al medio 2.

1.11. Condiciones de Frontera

1.11.1. Caso Electroestático

Al aplicar la ley de Gauss para el pequeño cilindro, mostrado en la figura 1.19

$$\iint_{\text{cilindro}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q$$

La altura del cilindro es muy pequeño, lo suficiente para que la base superior esté en el medio 2 y la base inferior esté en el medio 1, de tal manera que no contribuye a la integral y además

$$Q = \sigma \Delta S + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) \Delta v$$

como $\Delta v \rightarrow 0$, se escribe que $Q = \sigma \Delta S$, carga en la superficie de separación entre los medios intersectada por el cilindro; por lo que la integral queda:

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \Delta S = \sigma \Delta S$$

entonces

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma \quad (1.66)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal que va del medio 1 al medio 2, como se señala en la figura 1.19; pudiéndose escribir entonces

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1.67)$$

Esto quiere decir que, la discontinuidad en la componente normal de \mathbf{D} está determinada por la densidad superficial de carga libre en la superficie de separación.

Apliquemos ahora la condición para campo electrostático

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

a la trayectoria mostrada en la figura 1.19; se debe considerar que el ancho es muy pequeño y no contribuye a la integral, o sea

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{l}_2 + \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{l}_1 = 0 \implies E_{2t}\Delta l - E_{1t}\Delta l = 0$$

lo que conduce a

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.68)$$

la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una superficie de separación, también se acostumbra a escribir en la forma

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1.69)$$

1.11.2. Caso Magnetostático

Aplicando la ley de Gauss, para el caso magnético, al pequeño cilindro de la figura 1. 20, en forma similar como se procedió para el caso eléctrico:

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \implies B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0,$$

concluyendo que

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (1.70)$$

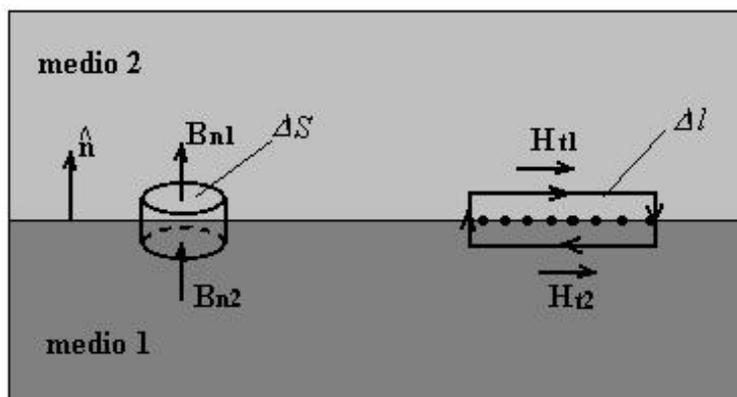


Figura 1.20: Condiciones de frontera magnetostáticas para los medios 1 y 2, se ha tomado el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ el que se dirige del medio 1 al medio 2.

La componente normal de la inducción magnética es continua cuando atraviesa una superficie de separación. También se puede escribir

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1.71)$$

Aplicando ahora la ley de Ampère a la trayectoria rectangular de la figura 1.20:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \implies H_{2t} \Delta L - H_{1t} \Delta l = K \Delta l$$

donde K es la componente de la corriente superficial normal al plano de la trayectoria, de donde

$$H_{2t} - H_{1t} = K \quad (1.72)$$

o también

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (1.73)$$

La discontinuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} es igual a la densidad superficial de corriente.

1.12. Problemas

1. Una partícula de masa m y carga positiva q se mueva en un plano perpendicular a una inducción magnética \mathbf{B} uniforme. Demostrar que la partícula

se mueve en una circunferencia con módulo de la velocidad constante y el radio de la circunferencia dado por

$$r = \frac{mv}{qB}$$

2. Una partícula de carga q y masa m mueve con una velocidad v_0 (según el eje $+X$) entra en una región donde hay un campo magnético (según el eje $+Y$). Mostrar que, si la velocidad v_0 es suficientemente grande como para que el cambio de dirección sea despreciable y la fuerza magnética se pueda considerar constante y paralela al eje Z , la ecuación de la trayectoria de la partícula es

$$z = \left(\frac{qB}{2v_0m} \right) x^2$$

3. En una cierta región hay un campo eléctrico (según el eje $+Y$) y uno magnético (según el eje $+X$), ambos uniformes. Se inyecta una partícula, con carga q y masa m , con velocidad v_0 paralela al campo magnético.

a. Escribir la ecuación de movimiento de la partícula en coordenadas rectangulares.

b. Mostrar, por sustitución directa, que las componentes de la velocidad al tiempo t son

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \\ v_y &= \left(\frac{E}{B} \right) \sin \left(\frac{qB}{m} \right) t \\ v_z &= - \left(\frac{E}{B} \right) \left[1 - \cos \left(\frac{qB}{m} \right) t \right] \end{aligned}$$

c. Del resultado precedente, obtener las coordenadas de la partícula al tiempo t , si parte del origen.

d. Hacer un gráfico de la trayectoria.

4. Un dipolo eléctrico de momento \mathbf{p} está dentro de un campo eléctrico \mathbf{E} uniforme. Demostrar que el torque sobre el dipolo viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

5. Hallar las componentes rectangulares del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico.

6. Se da una línea recta infinitamente larga cargada con densidad de carga uniforme λ , por unidad de longitud. Por integración directa, hallese el campo eléctrico a una distancia r de la línea.

7. Una distribución de carga esférica tiene una densidad de carga volumétrica que es función únicamente de r , la distancia al centro de la distribución. En otras palabras $\rho = \rho(r)$. Si $\rho(r)$ es como se indica a continuación, determinese el campo eléctrico en función de r .

$$\mathbf{a.} \quad \rho(r) = \begin{cases} \frac{A}{r} & \text{siendo } A \text{ una constante, para } 0 \leq r \leq R \\ 0, & \text{para } r > R \end{cases}$$

$$\mathbf{b.} \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{constante, para } 0 \leq r \leq R \\ 0, & \text{para } r > R \end{cases}$$

8. Un alambre conductor recto lleva una corriente I , hallar por integración directa el campo de inducción magnética \mathbf{B} a una distancia R del alambre.

9. Una espira circular de radio R lleva una corriente I , hallar la inducción magnética \mathbf{B} en puntos sobre el eje de la espira.

10. Se dá un circuito de corriente que tiene forma de un hexágono regular de lado a . Si el circuito conduce una corriente I , hállese la inducción magnética en el centro del hexágono.

11. Se dá una franja delgada de metal de anchura ω y muy larga. La corriente en la franja es lo largo de su longitud; la corriente total es I . Hállese

a. La inducción magnética en el plano de la franja a una distancia b del borde más próximo.

b. La inducción magnética a una distancia d por encima de la franja, perpendicular a la recta que pasa por centro de la franja a lo largo de ella.

12. Utilizando la ley de Ampère, hállese la inducción magnética a una distancia r del centro de un cilindro largo de radio R que conduce una corriente I . Hágase esto tanto para $r > R$, como para $r < R$, donde R es el radio del cilindro.

13. Un gran número de vueltas muy próximas a unas con otras, de un alambre fino, se enrollan en una sola capa sobre la superficie de una esfera de madera de radio R , con los planos de las vueltas perpendiculares al eje de la esfera y cubriendo completamente su superficie. Si la corriente en el enrollado es I , determinese la inducción magnética en el centro de la esfera.

14. Un toroide se enrolla uniformemente, tiene N vueltas de alambre por las que pasa una corriente I . El radio interior del toroide es a , el exterior, b .

a. Hállese la inducción magnética en puntos interiores al devanado toroidal.

b. Hállese la relación $\frac{b}{a}$ que permitirá que \mathbf{B} en el anillo no varíe en más del 25 %.

15. Una varilla metálica de longitud l gira respecto a un eje, que pasa y es perpendicular a la varilla, con una velocidad angular ω . El plano de rotación

de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción magnética \mathbf{B} . ¿Cuál es la *f.e.m.* inducida entre los extremos de la varilla?

Capítulo 2

Electrostática en el Vacío

2.1. Introducción

En la situación estática las derivadas con respecto al tiempo son nulas. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell 1.28 y 1.62 se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

además en el vacío la polarización es cero, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ y de la ecuación 1.27 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, la ecuación 2.1 se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Las condiciones de frontera 1.66 y 1.69 toman la forma de

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.5)$$

A continuación se dan algunos ejemplos que se pueden resolver fácilmente utilizando algunos de las ecuaciones anteriores.

Ejemplo: Campo de un plano cargado

Considerando un plano infinito cargado uniformemente con densidad de carga σ por unidad de área, figura 2.1. Por simetría \mathbf{E} es normal al plano de igual

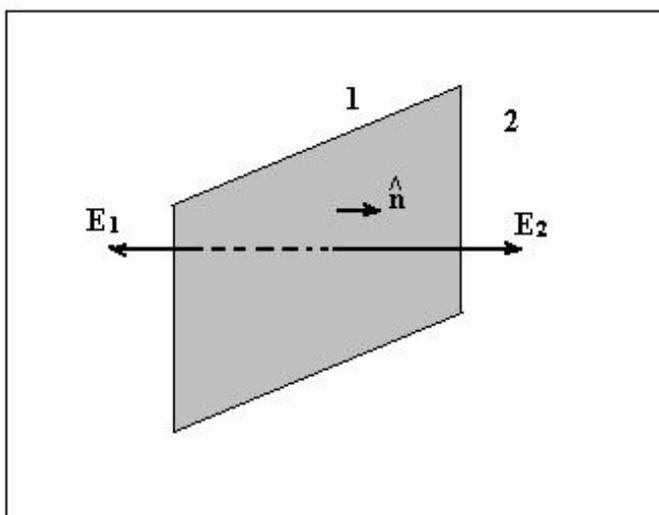


Figura 2.1: Plano infinito cargado, divide el espacio en dos regiones la región 1 y la región 2.

magnitud en ambos lados del plano., por consiguiente $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_2 = E$ y $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_1 = -E$, ahora de la ecuación 2.4 se tiene que $2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, de tal manera que

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.6)$$

Ejemplo: Campo fuera de una distribución esférica de carga

Se supone que ρ es independiente de los ángulos o sea $\rho = \rho(r)$, donde r es la distancia medida desde el centro de la distribución. Por simetría \mathbf{E} está en la dirección radial mostrada en la figura 2.2 y su magnitud E depende solamente de r . Si calculamos la integral de superficie sobre una esfera de radio r , \mathbf{E} es paralela al elemento de área $\hat{\mathbf{n}}da$, entonces

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = E \iint_{S, \text{ cerrada}} da = 4\pi r^2 E = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Aquí hemos hecho uso del teorema de la divergencia y la ecuación 2.3 Q es la carga total de la esfera. Por lo tanto

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.7)$$

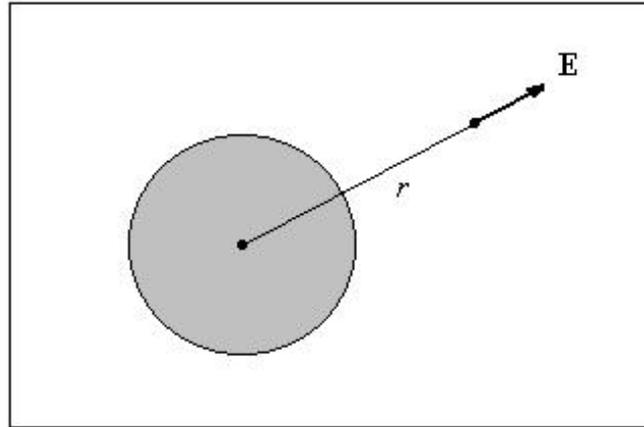


Figura 2.2: Distribución de carga esféricamente simétrica con densidad volumétrica dependiente de r , $\rho = \rho(r)$

Este resultado es el mismo que el de una carga puntual Q ubicada en el centro de la distribución; por lo que podemos inducir que el campo fuera de una distribución de carga esféricamente simétrica es igual a que toda la carga se localizara en el centro de la distribución.

2.2. Potencial Eléctrico

Teniendo en cuenta la ecuación 2.2, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ entonces

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (2.8)$$

cuando se conoce la distribución de carga se puede escribir la expresión del potencial dada por la ecuación 1.33

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{todo el espacio}} \frac{\rho(\mathbf{r}) dv}{r} \quad (2.9)$$

el potencial es medido en voltios y el campo \mathbf{E} es medido en voltios/metro. Por otro lado, una superficie donde el potencial es constante $\Phi(\mathbf{r}) = cte.$ se denomina superficie equipotencial. Como $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y el gradiente siempre es perpendicular a la superficie $\Phi(\mathbf{r}) = cte.$, entonces como el campo eléctrico

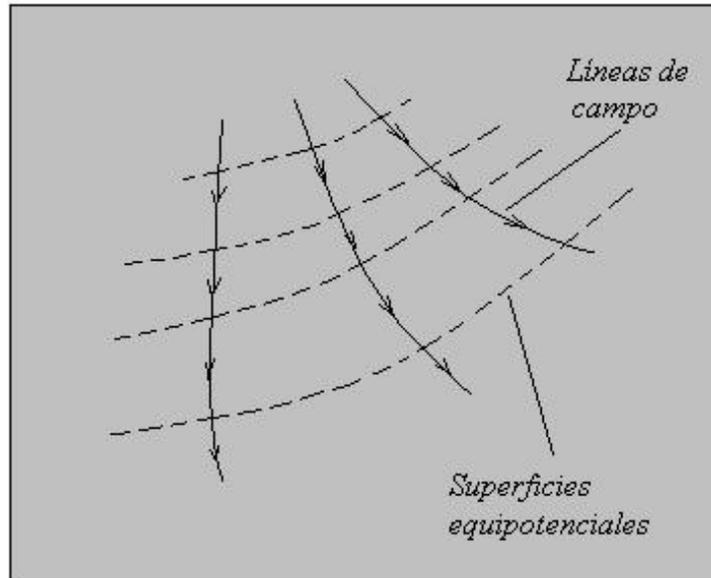


Figura 2.3: Líneas de campo y superficies equipotenciales, las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

es tangente a las líneas de campo en cada punto, estas son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Un ejemplo se muestra en la figura 2.3

Se define un conductor como una región donde las cargas se pueden mover bajo la acción de un campo eléctrico externo. Considerando la situación de equilibrio electrostático, el campo en el interior de un conductor debe ser nulo, de no ser así habría movimiento de las cargas del conductor hacia la superficie. De aquí se deduce que el potencial en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es constante; por lo que la superficie conductora será una superficie equipotencial y el campo debe ser entonces perpendicular a la superficie conductora.

Al aplicar la ley de Gauss a la superficie punteada dentro del un conductor como en la figura 2.4

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.10)$$

por lo tanto $Q = 0$ en el interior de S , como S es una superficie cualquiera en el interior del conductor, se puede concluir que en condiciones de equilibrio

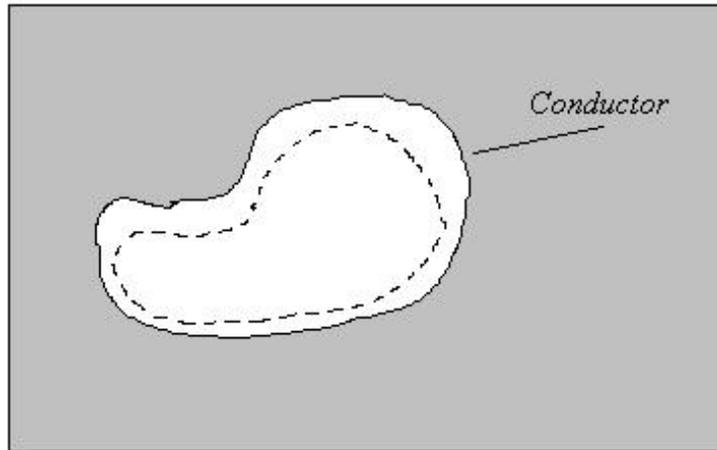


Figura 2.4: Conductor en equilibrio electrostático.

electrostático, en el interior de un conductor, la carga neta es nula; por lo que de existir carga esta debe residir en la superficie.

Aplicando la condición de frontera, ecuación 2.4, en una superficie conductora de la figura 2.5

$\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$, el cual es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$ o sea $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_2 = E$, entonces de la ecuación 2.4 se obtiene

$$\epsilon_0 E = \sigma = -\epsilon_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi \quad (2.11)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación 2.8. De la ecuación 2.11 se aprecia que una vez conocida $\Phi(\mathbf{r})$ se puede conocer la densidad superficial de carga σ en la superficie conductora.

2.3. Ecuaciones de Poisson y Laplace

2.3.1. Introducción

Se puede obtener una ecuación diferencial para el potencial combinando las ecuaciones para el campo electrostático:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (2.13)$$

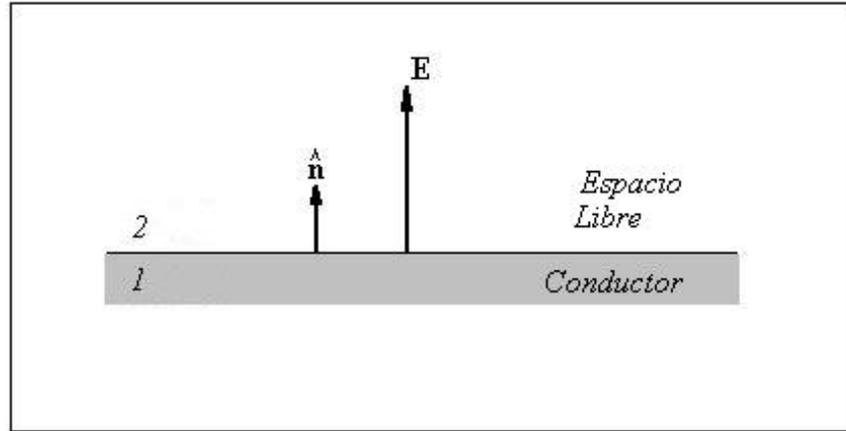


Figura 2.5: El medio 1 es el conductor y medio 2 es el espacio libre.

donde ρ es la densidad volumétrica de carga, Φ es potencial y \mathbf{E} es el campo eléctrico. Al combinar las ecuaciones 2.12 y 2.13 se llega a:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

denominada la *ecuación de Poisson*, cuya solución se comprobará que es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \frac{\rho}{r} dv \quad (2.15)$$

Cuando en la región la densidad de carga es nula, $\rho = 0$, la ecuación 2.14 se convierte en la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.16)$$

2.3.2. Solución de la Ecuación de Poisson

Se utiliza el denominado *teorema de Green*, el cual se obtiene partiendo de la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \quad (2.17)$$

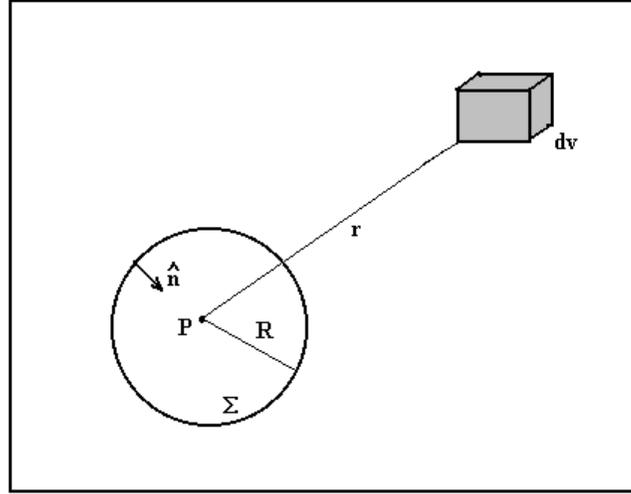


Figura 2.6: Hueco esférico en todo el espacio, de superficie Σ y radio R , el vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$ va hacia el punto P , centro del hueco esférico.

donde Φ y Ψ son funciones arbitrarias. Ahora por el teorema de la divergencia:

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iiint_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) dv = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dv \quad (2.18)$$

intercambiando Φ y Ψ en la ecuación 2.18 y restando se obtiene

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dv \quad (2.19)$$

expresión conocida como el *teorema de Green*.

Aplicado al caso que $\Psi = \frac{1}{r}$, donde Ψ se hace infinito en el origen. Se escoge un punto P en el que se está interesado como centro de un hueco esférico de radio R (figura 2.6) y se aplica la ecuación 2.19 excepto en la esfera

Se aprecia que $\nabla^2 \Psi = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, puesto que $\frac{1}{r}$ es una solución de la ecuación de Laplace (ecuación 2.16)

De la figura 2.6 se observa lo siguiente:

$$\nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -\frac{d\Psi}{dr} da = \frac{da}{r^2} \quad (2.20)$$

y

$$\nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{n}}da = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}da \quad (2.21)$$

reemplazando en la ecuación 2.19

$$\iint_{\text{esfera } \Sigma} \frac{\Phi da}{r^2} + \iint_{\text{esfera } \Sigma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \frac{da}{r} = - \iiint_V \frac{\nabla^2\Phi}{r} \quad (2.22)$$

donde Σ es la superficie del hueco esférico y V es el volumen de todo el espacio excepto el del hueco esférico. Como en la superficie de la esfera $r = R$, se puede escribir que

$$\iint_{\text{esfera } \Sigma} \frac{\Phi da}{r^2} = \frac{1}{R^2} \iint_{\text{esfera } \Sigma} \Phi da = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \bar{\Phi} \quad (2.23)$$

donde $\bar{\Phi}$ es el valor medio de Φ en la superficie del hueco esférico. Similarmente.

$$\iint_{\text{esfera } \Sigma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \frac{da}{r} = 4\pi R \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)} \quad (2.24)$$

por lo que la ecuación 2.22 se convierte en

$$4\pi\bar{\Phi} + 4\pi R \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)} = - \iiint_V \frac{\nabla^2\Phi}{r} dv \quad (2.25)$$

Como se quiere obtener el valor de Φ en cualquier punto P , se hace lo siguiente: $R \rightarrow 0$; $\bar{\Phi} \rightarrow \Phi_P$ y $\lim_{R \rightarrow 0} 4\pi R \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)} = 0$; $V \rightarrow \text{Todo el espacio } (T.E)$; por lo que la ecuación 2.25 se convierte en

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{T.E} \frac{\nabla^2\Phi}{r} dv \quad (2.26)$$

si el potencial satisface la ecuación de Poisson, entonces la ecuación 2.26 es idéntica a la ecuación 2.15

Solución para una Región Finita

Se ha visto hasta ahora que se puede calcular Φ , si conocemos la densidad volumétrica de carga en todos los puntos del espacio. En muchos problemas,

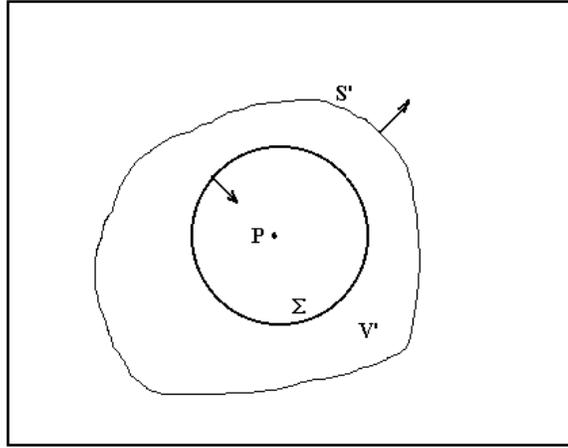


Figura 2.7: Se ilustra una superficie S' que encierra el volumen v del cual conocemos ρ , mientras que en el exterior de S' se desconoce la distribución de carga, conociendo el valor del potencial en S' .

sin embargo, ρ es conocida solamente dentro de cierto volumen finito, que es rodeado por una superficie exterior de la cual se conoce la distribución de carga, se mostrará ahora que, si el potencial es conocido en la superficie limitadora y la densidad volumétrica de carga es conocida dentro de la región limitada, podemos aún encontrar Φ .

Regresando a la ecuación de Poisson, ecuación 2.14, se observa que se puede escribir la solución general como la suma de una solución especial de la ecuación inhomogénea (ecuación 2.14) y la solución general de la ecuación homogénea (ecuación 2.16).

Hasta aquí las condiciones de límites arbitrarios puede ser satisfecha con la solución general escogida apropiadamente de la ecuación 2.16, mientras que la ecuación 2.14 será satisfecha por la inclusión de la solución particular.

Se puede demostrar utilizando el teorema de Green, ecuación 2.19. La nueva situación se observa en la figura 2.7, donde el pequeño hueco esférico que rodea a P es temporalmente excluida de V . Ahora en S'

$$\nabla\Psi = \frac{d\Psi}{dr}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.27)$$

y en la ecuación 2.19, S consiste en Σ más S' , procediendo como antes, se

llega a

$$\iint_{\text{esfera } \Sigma} \frac{\Phi da}{r^2} + \iint_{\text{esfera } \Sigma} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) da + \iint_{S', \text{ cerrada}} \left(-\frac{\Phi \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\nabla \Phi}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = - \iiint_{V'} \frac{\nabla^2 \Phi dv}{r} \quad (2.28)$$

donde V' es igual a V menos el volumen del hueco esférico. Esto lleva a:

$$4\pi \bar{\Phi} + 4\pi R \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)} = - \iiint_{V'} \frac{\nabla^2 \Phi dv}{r} + \iint_{S', \text{ cerrada}} \left(\frac{\Phi \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\nabla \Phi}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (2.29)$$

ahora como $R \rightarrow 0$, $\bar{\Phi} \rightarrow \Phi_P = \Phi$, $V' \rightarrow V$ y $S' \rightarrow S$, donde S es la superficie total que rodea a V . Utilizando las ecuaciones 2.14 y 2.29 se convierte en:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{4\pi} \iint_{S, \text{ cerrada}} \left(\frac{\Phi \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\nabla \Phi}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (2.30)$$

Se puede obtener el resultado previo, ecuación 2.15 a partir de ecuación 2.30, permitiendo que V encierre todas las cargas. Una vez que se aleje lo suficiente de todas las cargas encerradas, aparecerán como cargas puntuales de modo que para r muy grande. $\Phi \sim \frac{1}{r}$ y $|\nabla \Phi| \sim \frac{1}{r^2}$. entonces en la integral de superficie, el integrando $\sim \frac{1}{r^3}$, mientras que el área $\sim r^2$, así que toda la integral $\sim \frac{1}{r}$, que se acerca a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Por consiguiente la contribución de la integral de superficie desaparecerá y se llega a la ecuación 2.15

Aunque la ecuación 2.30 nos facilita en principio calcular Φ en cualquier punto dentro del volumen V , este no es siempre el camino conveniente para resolver un problema dado, en muchos problemas se exige encontrar el potencial dentro de una región limitada cuando la carga no está presente en la región. En esta última circunstancia, especialmente, la ecuación más apropiada para resolver es la ecuación 2.16, porque su solución general es necesaria para resolver la ecuación 2.14. En la siguiente ítem consideramos algunos métodos para resolver la ecuación 2.16

2.3.3. Solución de la Ecuación de Laplace

Se utilizará el denominado método de separación de variables para resolver la ecuación 2.16, en coordenadas rectangulares y esféricas, quedando como

ejercicio su solución en coordenadas cilíndricas, también aplicaremos cada una de estas soluciones a un problema específico de electrostáticas con condiciones en la frontera.. Se hará uso de las expresiones del laplaciano en cada uno de los sistemas de coordenadas y se encontraran algunas ecuaciones diferenciales especiales, de las cuales tomaremos sus soluciones ya vistas en cursos de matemáticas.

Coordenadas Rectangulares

Como es sabido el laplaciano en coordenadas cartesianas viene dado por

$$\nabla^2\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

entonces, la ecuación a solucionar es

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.32)$$

suponiendo una solución de la forma

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.33)$$

reemplazando la ecuación 2.33 en la ecuación 2.32 se obtiene

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \quad (2.34)$$

para que se cumpla esta ecuación es necesario que cada sumando sea igual a una constante, o sea

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2, \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2, \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (2.35)$$

donde

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (2.36)$$

las soluciones para cada una de las ecuaciones en la expresión 2.35 se pueden escribir como

$$X(x) = a_1e^{\alpha x} + a_2e^{-\alpha x} \quad (2.37)$$

$$Y(y) = b_1e^{\beta y} + b_2e^{-\beta y} \quad (2.38)$$

$$Z(z) = c_1e^{\gamma z} + c_2e^{-\gamma z} \quad (2.39)$$

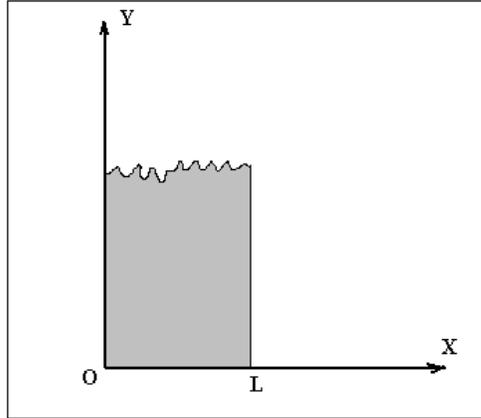


Figura 2.8: Tira semi-infinita, para un problema bidimensional de solución de la ecuación de Laplace.

De la ecuación 2.36, las constantes α, β y γ todas no pueden ser reales, ni todas imaginarias; por consiguiente algunas de las funciones X, Y, Z varían sinusoidalmente con el argumento y otras varían exponencialmente. La solución general de la ecuación 2.32 es de la forma

$$\Phi(x, y, z) = \sum_i (a_{1i}e^{\alpha_i x} + a_{2i}e^{-\alpha_i x}) (b_{1i}e^{\beta_i y} + b_{2i}e^{-\beta_i y}) (c_{1i}e^{\gamma_i z} + c_{2i}e^{-\gamma_i z}) \quad (2.40)$$

todas las constantes se obtienen con condiciones en la frontera

Ejemplo: Tira Semi-infinita

Este es un problema de dos dimensiones donde $\Phi = \Phi(x, y)$; de tal manera que se asume que $\gamma = 0$ y (2.6) se convierte en $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Así que $\alpha = i\beta$, donde se asume que $\beta > 0$, por lo que (2.10) se convierte en

$$\Phi(x, y) = \sum_n (A_{1n}e^{i\beta_n x} + A_{2n}e^{-i\beta_n x}) (B_{1n}e^{\beta_n y} + B_{2n}e^{-\beta_n y}) \quad (2.41)$$

Las condiciones de frontera para este problema son

$$\text{en } x = 0 \quad \Phi(0, y) = 0 \quad (2.42)$$

$$\text{en } x = L \quad \Phi(L, y) = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{en } y = 0 \quad \Phi(x, 0) = f(x) \quad (2.44)$$

$$\text{en } y \rightarrow \infty \quad \Phi(x, \infty) = 0 \quad (2.45)$$

Donde $f(x)$ es alguna función dada, y puede ser producida por una distribución apropiada de la carga exterior de la tira. Aplicando las condiciones en la frontera adecuadamente, primero en la ecuación 2.45 se obtiene que $B_{1n} = 0$, para cualquier n y haciendo $A_{1n}B_{2n} = A_n$ y $A_{2n}B_{2n} = B_n$ la solución 2.45 toma la forma

$$\Phi(x, y) = \sum_n (A_n e^{i\beta_n x} + B_n e^{-i\beta_n x}) e^{-\beta_n y} \quad (2.46)$$

aplicando ahora la condición 2.42 se llega a

$$\Phi(0, y) = \sum_n (A_n + B_n) e^{-\beta_n y} = 0 \quad (2.47)$$

entonces $B_n = -A_n$, la solución toma la forma

$$\Phi(x, y) = \sum_n (2iA_n) \sin(\beta_n x) e^{-\beta_n y} \quad (2.48)$$

aplicando la condición de frontera 2.43 se llega a

$$\Phi(L, y) = \sum_n (2iA_n) \sin(\beta_n L) e^{-\beta_n y} \quad (2.49)$$

de donde sale que $\beta_n L = n\pi$, osea $\beta_n = \frac{n\pi}{L}$; $n = 1, 2, 3, \dots$, haciendo $C_n = 2iA_n$, lo que conduce a:

$$\Phi(x, y) = \sum_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{n\pi y}{L}} \quad (2.50)$$

donde se ha reemplazado a $2iA_n$ simplemente por A_n . Aplicando la última condición de frontera 2.44

$$\Phi(x, 0) = f(x) = \sum_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.51)$$

conocida $f(x)$ se puede determinar A_n aprovechando la ortogonalidad de $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \sum_n C_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_n C_n \frac{1}{2} L \delta_{mn} = \frac{1}{2} L A_m \end{aligned} \quad (2.52)$$

entonces

$$C_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (2.53)$$

conocida la constante C_m se introduce como C_n en la ecuación 2.40 y podemos calcular $\Phi(x, y)$ en cualquier punto de la tira.

Coordenadas Esféricas

Para este caso la ecuación de Laplace viene expresada como

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \right] = 0 \quad (2.54)$$

Utilizando nuevamente el método de separación de variables y tomando como solución a

$$\Phi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Psi(\phi) \quad (2.55)$$

introduciendo esta ecuación 2.54 se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Psi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0 \quad (2.56)$$

como el primer sumando depende unicamente de r , podemos escribir

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\Psi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = \lambda \quad (2.57)$$

donde λ es la constante de separación, entonces

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0 \quad (2.58)$$

esta ecuación diferencial es de la forma: $x^2 y'' + pxy' + qy = 0$, donde p y q son constantes, denominada ecuación de Euler. En este caso $p = 2$ y $q = -\lambda$; la ecuación indicial es: $m(m-1) + 2m - \lambda = 0$, o sea $m^2 + m - \lambda = 0$;

entonces los exponentes son $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})$, por consiguiente la solución general de 2.58 es

$$R(r) = Ar^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}} + Br^{-\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}} \quad (2.59)$$

para garantizar que $R(r)$ tenga un valor en $r = 0$ y también para cuando $r \rightarrow \infty$, entonces $-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = n$, n entero no negativo, entonces $\lambda = n(n+1)$; por lo que la solución 2.59 se escribe como

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1} \quad (2.60)$$

De la ecuación 2.57 deducimos que

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = -n(n+1)\sin^2\theta - \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (2.61)$$

pudiendose escribir entonces

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = -\beta, \quad \beta \text{ cte.} \quad (2.62)$$

entonces

$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + \beta\Psi = 0 \quad (2.63)$$

Suceden tres casos:

1. Si $\beta = 0 \implies \Psi(\phi) = C_1\phi + C_2$ la cual no cumple que $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$, condición de univaluada.

2. Si $\beta < 0 \implies \beta = -\alpha^2, \alpha \in \text{Re} \implies \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} - \alpha^2\Psi(\phi) = 0 \implies \Psi(\phi) = C_1e^{\alpha\phi} + C_2e^{-\alpha\phi}$ que tampoco cumple con la condición de univaluada.

3. Si $\beta > 0 \implies \beta = m^2, m \in \text{Re} \implies \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Psi(\phi) = 0 \implies \Psi(\phi) = A_\phi e^{im\phi}$, para que cumpla la condición de univaluada se tiene que $\Psi(\phi + 2\pi) = A_\phi e^{im(\phi+2\pi)} = A_\phi e^{im\phi} e^{im2\pi} = A_\phi e^{im\phi} = \Psi(\phi)$, si $e^{im2\pi} = 1 \implies \cos m2\pi + i \sin m2\pi = 1 \implies m$ es un entero

Por lo que la solución toma la forma:

$$\Psi(\phi) = A_\phi e^{im\phi} \quad (2.64)$$

m es entero, porque nos garantiza que la solución de 2.63 cumple la condición de univaluada unicamente cuando ϕ se aumenta en 2π .

De la ecuación 2.61 se deduce que

$$-m^2 = -n(n+1)\sin^2\theta - \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (2.65)$$

entonces

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [n(n+1)\sin^2\theta - m^2] \Theta = 0 \quad (2.66)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable: $u = \cos\theta$, se llega a

$$(1-u^2) \frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + [(1-u^2)n(n+1) - m^2] \Theta = 0 \quad (2.67)$$

Pudiendose escribir como:

$$(1-u^2) \frac{d^2\Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-u^2)} \right] \Theta = 0 \quad (2.68)$$

esta es la “Ecuación Asociada de Legendre” cuya solución son las “Funciones Asociadas de Legendre”:

$$P_n^m(u) = (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(u)}{du^m} \quad (2.69)$$

donde se toma $m = 0, 1, 2, \dots, n$ y los $P_n(u)$ son los “Polinomios de Legendre” que vienen dados por:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (2.70)$$

Para valores negativos de m , se puede aplicar la identidad:

$$P_n^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(u) \quad (2.71)$$

Se acostumbra escribir la solución de la parte angular de la ecuación de Laplace $\Theta(\theta)\Psi(\phi)$, teniendo en cuenta las respectivas soluciones como:

$$Y_n^m(\theta, \phi) = C e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta) \quad (2.72)$$

obtenidas a partir de dos conjuntos de funciones ortogonales, $\{e^{im\phi}, 0 \leq \phi < 2\pi\}$ y $\{P_n^m(\cos \theta), 0 \leq \theta < \pi\}$, son ortogonales sobre la esfera unidad y se les llama “*Armónicos Esféricos*”. El coeficiente C , real, se elige de tal manera que los Y_n^m , constituyan un sistema ortonormal de funciones:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta Y_n^{m*}(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi) d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.73)$$

de donde se puede obtener el valor de C , dado por:

$$C = (-1)^m \left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.74)$$

de tal manera que los armónicos esféricos se escriben como:

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) \quad (2.75)$$

para valores negativos de m se usa la identidad:

$$Y_n^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \phi) \quad (2.76)$$

Cuando el potencial Φ es independiente de ϕ (simetría alrededor del eje Z), entonces $m = 0$ y la ecuación 2.67 se convierte en

$$(1-u^2) \frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + (1-u^2) n(n+1) \Theta = 0 \quad (2.77)$$

entonces

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + n(n+1) \Theta = 0 \quad (2.78)$$

o sea

$$(1-u^2) \frac{d^2\Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + n(n+1) \Theta = 0 \quad (2.79)$$

que es la denominada *Ecuación de Legendre*, cuya solución son los denominados Polinomios de Legendre, vistos anteriormente.

$$\Theta(\theta) = P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^n} \quad (2.80)$$

Ahora podemos decir que la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, con simetría alrededor del eje Z , es

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \quad (2.81)$$

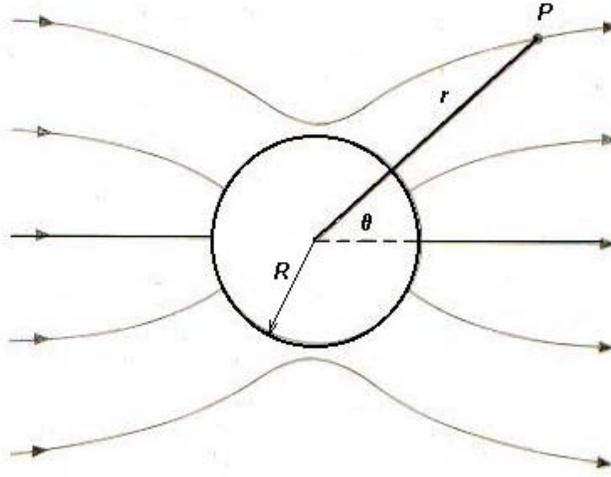


Figura 2.9: Líneas de campo eléctrico después de introducir la esfera conductora descargada. La dirección inicial del campo es $E_0 \hat{\mathbf{u}}_z$.

Ejemplo

Esfera sólida conductora descargada dentro de un campo eléctrico inicialmente uniforme \mathbf{E}_0 (figura 2.9)

Las condiciones de frontera son las siguientes

$$\mathbf{E}(r, \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -\nabla \Phi(r, \theta) |_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{u}}_z \quad (2.82)$$

o sea

$$\Phi(r, \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z + cte = -E_0 r \cos \theta + cte. \quad (2.83)$$

$$\Phi(r, \theta) |_{r=R} = \Phi_0 \quad (2.84)$$

Desarrollando la ecuación 2.81 se llega a

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (2.85)$$

Aplicando la condición de frontera 2.83 se ve que: $A_1 = -E_0$ y $A_n = 0$ para $n \geq 2$.

Ahora el término $B_0 r^{-1}$ produce un campo radial que es compatible con un conductor esférico que tiene una carga total neta, en este problema la esfera está descargada por lo tanto $B_0 = 0$

Al tener en cuenta la condición de frontera 2.84, se observa que el potencial debe ser independiente de la coordenada θ , entonces los dos términos en que interviene $\cos \theta$ se eliminan, pero los términos con potencias inversas mayores que r^2 no pueden eliminarse entre sí debido a que contienen funciones de Legendre diferentes, o sea que $B_n = 0$, para $n \geq 2$. Por lo tanto la solución queda:

$$\Phi(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta; \quad r \geq R \quad (2.86)$$

entonces

$$\Phi(R, \theta) = \Phi_0 \implies A_0 = \Phi_0 \text{ y } B_1 = E_0 R^3 \quad (2.87)$$

Por lo tanto la solución definitiva para este problema es

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta \quad (2.88)$$

El campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla \Phi(r, \theta) = -\hat{\mathbf{u}}_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (2.89)$$

una vez calculado el gradiente y organizando los términos se llega a

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \hat{\mathbf{u}}_r E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (2.90)$$

Evaluando el campo eléctrico en la superficie de la esfera

$$\mathbf{E}(R, \theta) = \hat{\mathbf{u}}_r 3E_0 \cos \theta \quad (2.91)$$

o sea perpendicular a la superficie esférica, como era de esperarse, por consiguiente la densidad superficial es

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E(R, \theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.92)$$

y la carga total en la esfera conductora es

$$Q = \iint_{\text{esfera}} \sigma(\theta) da = 3\epsilon_0 R^2 E_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (2.93)$$

como se habia dicho en el enunciado del problema.

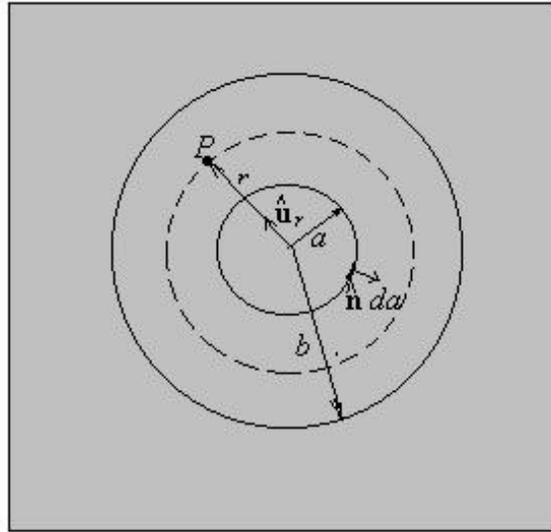


Figura 2.10: Condensador esférico de radio interior a y radio exterior b .

Ejemplo

Problema con simetría esférica. En este caso $\Phi = \Phi(r)$, o sea que $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0$, la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 0 \implies \\ r^2 \frac{d\Phi}{dr} &= cte = -A \implies \\ \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{A}{r^2} \implies \end{aligned}$$

$$\Phi(r) = \frac{A}{r} + B \quad (2.94)$$

A y B son constantes que se determinan con las condiciones de frontera.

Ejemplo

Condensador esférico. Considerando dos conductores esféricos concéntricos, y asumiendo que la esfera interior tiene una carga q y que la exterior está a un potencial Φ_b , como se muestra en la figura 2.10

Tomando como solución la del ejemplo anterior, ecuación 2.94, se tiene que

$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr}\hat{\mathbf{u}}_r = -\mathbf{E} = -\frac{A}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \quad (2.95)$$

Aplicando la ley de Gauss para la esfera de radio $r = a$, se tiene

$$\iint_{\text{esfera } S_a} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{A}{a^2} \iint_{\text{esfera } S_a} da = \frac{A}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi A = \frac{q}{\epsilon_0} \implies A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

Por lo que la solución quedará como

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + B \quad (2.96)$$

ahora en $r = b$, $\Phi = \Phi_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + B \implies B = \Phi_b - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$, reemplazando en 2.96 se tiene

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \Phi_b \quad (2.97)$$

El potencial en la esfera de radio $r = a$ será

$$\Phi_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \Phi_b \quad (2.98)$$

La capacitancia se define como la razón de la carga en la esfera interior y la diferencia de potencial, o sea de 2.98

$$C = \frac{q}{\Phi_a - \Phi_b} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} \quad (2.99)$$

Si $b \rightarrow \infty$ entonces $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 a$ que da la fórmula de la capacitancia para una esfera aislada. Las unidades de ϵ_0 es $\frac{F}{m}$ y la de C Faradio (F).

2.4. Problemas

1. Demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de Laplace
2. Un conductor cilíndrico de radio a infinitamente largo y recto tiene una carga λ por unidad de longitud. Encuentre el potencial a una distancia R del eje del cilindro.
3. Un condensador está hecho de dos grandes placas conductoras paralelas cada una de área A , las cuales están separadas por una distancia pequeña d .

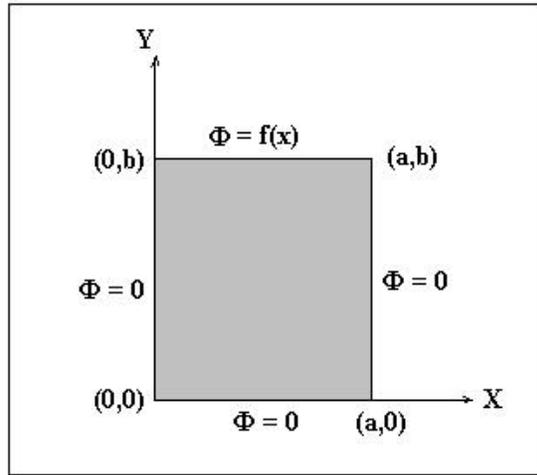


Figura 2.11: Tubo de sección rectangular del problema 7.

La diferencia de potencial entre las placas es $\Delta\Phi$. Encuentre la densidad de carga σ y $-\sigma$ en la superficie de las placas. Demuestre que la capacitancia es $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$. No tenga en cuenta el efecto en los bordes de las placas.

4. Una distribución esférica de carga se caracteriza por una densidad de carga constante ρ para $r \leq R$. Para radios mayores que R , la densidad de carga es nula. Hallese el potencial solucionando la ecuación de Poisson. Verifique este resultado evaluando la integral dada por la ecuación 2.15.

5. Encuentre el potencial electrostático, Φ , dentro de un cubo de lado L , con un vértice en el origen y en el primer octante. No hay carga dentro del cubo. El potencial sobre la cara $z = 0$ tiene valor Φ_0 y el potencial en todas las otras caras es cero.

6. Resolver la forma bidimensional de la ecuación de Laplace expresada en coordenadas polares (R, ϕ) (cilíndricas para $z = 0$) por el método de separación de variables. Demostrar que la solución general puede estar escrita como

$$\Phi(R, \phi) = A_0 \ln R + B_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} R^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$$

7. Aplicar el resultado del problema anterior para encontrar el potencial de un conductor cilíndrico infinito descargado y puesto a tierra, en un campo eléctrico inicialmente uniforme y perpendicular al eje del cilindro. Hallar además

el campo eléctrico para puntos fuera del cilindro y la densidad superficial de carga.

8. Encontrar el potencial $\Phi(x, y)$ en cualquier punto de un tubo de sección rectangular que se muestra en la figura 2.11, con las condiciones de frontera dadas en la misma figura.

Respuesta:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$$

donde

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) f(x) dx$$

9. Una esfera conductora de radio R que tiene una carga total Q se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme \mathbf{E}_0 . Hállese el potencial y el campo eléctrico en todos los puntos exteriores a la esfera.

10. Considere dos cilindros coaxiales. El cilindro interior de radio a y a un potencial Φ_a , el segundo cilindro de radio $b > a$ y a un potencial Φ_b . Calcular el potencial y el campo eléctrico en la región entre los cilindros.

2.5. Problemas Varios de los Capítulos 1 y 2

1. Una esfera conductora de radio R tiene una carga Q uniformemente distribuida. Calcule el campo eléctrico y el potencial en puntos $r > R$ y $r < R$. Haga un gráfico de cada una de estas funciones para $0 \leq r < \infty$.

2. Tres cargas se disponen en forma lineal. La carga $-2q$ se coloca en el origen, y dos cargas cada una de $+q$ se colocan en $(0, 0, l)$ y $(0, 0, -l)$, respectivamente. Hállese una expresión relativamente simple para el potencial $\Phi(\mathbf{r})$ válida para distancias $|\mathbf{r}| \gg l$.

3. Dado un cilindro circular recto de radio R y longitud L que tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_0 . Calcular el potencial electrostático en un punto sobre el eje del cilindro y externo a la distribución de carga.

4. Dada un región del espacio en que el campo eléctrico es paralelo al eje X en todos los puntos. Demostrar que el campo eléctrico es independiente de y y z en esta región. Si no hay carga en esta región, demostrar que el campo también es independiente de x .

- 5.** Dos cáscaras conductoras esféricas de radios a y b se disponen concéntricamente y se cargan a los potenciales Φ_a y Φ_b respectivamente. Si $b > a$, hállese el potencial en puntos entre las cáscaras, y en los puntos $r > b$.
- 6.** Dos cáscaras cilíndricas largas de radios a y b se disponen coaxialmente y se cargan a los potenciales Φ_a y Φ_b , respectivamente. Si $b > a$, hállese el potencial en puntos entre las cáscaras cilíndricas.
- 7.** Hallar la solución a la ecuación de Laplace en el interior de una región rectangular $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$, sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= \Phi(0, y) = 1 \text{ Voltio} \\ \Phi(2, y) &= \Phi(x, 3) = 0\end{aligned}$$

- 8.** Un dipolo de momento p tiene la dirección del eje $+Z$ y está situado en el origen de coordenadas. Un segundo dipolo de momento p está centrado en el punto $(a, 0, a)$ y señala hacia el origen. Calcular la fuerza sobre el segundo dipolo.
- 9.** Hállese el potencial de un cuadrupolo axial: cargas puntuales q , $-2q$, q están colocadas en el eje Z a distancias l , 0 , $-l$ del origen. Hállese el potencial sólo a las distancias $r \gg l$, y demuéstre que este potencial es proporcional a uno de los armónicos de zona [$P_n(\cos \theta)$].
- 10.** Un electrodo de forma hiperbólica ($xy = 4$) está colocado por arriba de una esquina puesta a tierra de ángulos rectos como en la figura 2.12. Calcule Φ y \mathbf{E} en el punto $(1, 2, 0)$ cuando el electrodo se conecta a una fuente de 20 V.

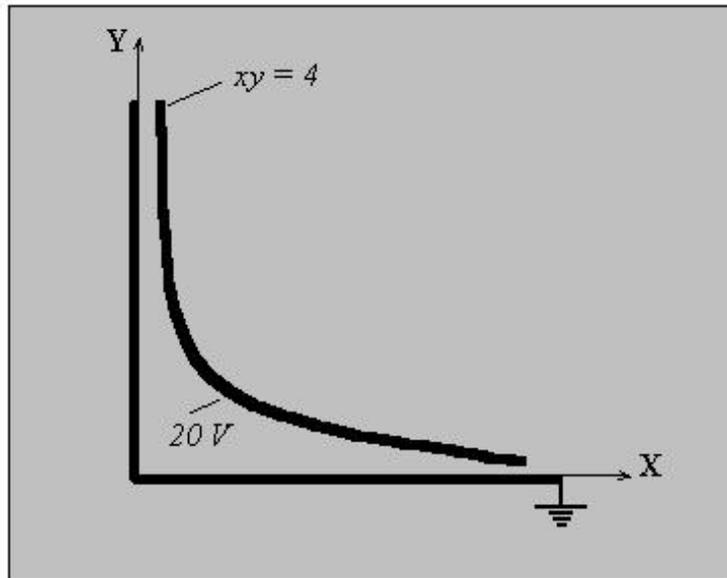


Figura 2.12: Digrama para el problema 10.

Capítulo 3

Electrostática en la Materia

3.1. Introducción

Como aún se sigue en electrostática, las ecuaciones de Maxwell que se utilizarán serán:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ y } \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

y se puede continuar usando

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

El potencial sin embargo no necesariamente satisface la ecuación de Poisson, porque se debe utilizar la ecuación general

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

combinando estas ecuaciones queda que

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \Phi + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho.$$

en general \mathbf{P} es una función de \mathbf{E} y por lo tanto de Φ .

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}(-\nabla\Phi).$$

Existen materiales, denominados *dieléctricos*, que se pueden polarizar por la acción de un campo eléctrico externo y quedan con polarización permanente.

3.2. Dieléctricos Lineales

En estos casos las componentes de \mathbf{P} son directamente proporcionales a la primera potencia de las componentes de \mathbf{E} . En general la relación es

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Los materiales descritos por la ecuación 3.1 se denominan dieléctricos lineales. Como se puede observar \mathbf{P} no es paralelo a \mathbf{E} y por lo tanto \mathbf{D} tampoco es paralelo a \mathbf{E} . Los coeficientes de proporcionalidad χ_{ij} son conocidos como las componentes del tensor susceptibilidad eléctrica.

3.3. Dieléctricos Lineales Isotrópicos

Se asumirá que el dieléctrico es lineal y en cada punto del dieléctrico sus propiedades eléctricas son independientes de la dirección de \mathbf{E} , con esta nueva condición el dieléctrico es isotrópico. En este caso \mathbf{P} es necesariamente paralelo a \mathbf{E} , y la relación será:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.2)$$

donde χ_e se denomina susceptibilidad eléctrica.

Combinando las ecuaciones 1.27 y 3.2 queda

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.3)$$

donde

$$\kappa_e = 1 + \chi_e \quad \textit{permitividad relativa} \quad (3.4)$$

$$\epsilon = \kappa_e \epsilon_0 \quad \textit{Permitividad eléctrica} \quad (3.5)$$

De la ecuación 3.3 se puede ver que \mathbf{D} es paralelo a \mathbf{E} . Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, entonces se puede escribir, teniendo en cuenta la ecuación 3.3,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi),$$

o sea

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = -\rho \quad (3.6)$$

En este caso ϵ varía de un punto a otro dentro del dieléctrico, o sea

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z)$$

Debe entonces asumirse otra condición para simplificar la ecuación 3.6

3.4. Dieléctricos Lineales Isotrópicos Homogéneos (l, i, h)

Se asumirá que las propiedades eléctricas son independientes de la posición, estos materiales eléctricamente se denominan homogéneos. Generalmente los gases, líquidos y algunos sólidos caen en esta categoría. En este caso ϵ es una constante característica del material. Por lo que la ecuación 3.6 se convierte en:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.7)$$

obteniendo así la ecuación de Poisson, cambiando la constante ϵ_0 por ϵ . Por lo que se puede utilizar la solución de esta ecuación en el vacío simplemente haciendo el cambio de la constante ϵ_0 por ϵ .

Usando la ecuación 3.3 y las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones 1.66 y 1.69, se pueden expresar completamente en términos de \mathbf{E} .

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3.9)$$

En la ecuación 3.8, la componente normal de \mathbf{E} no es continua en la superficie de separación de los dos medios dieléctricos, mientras que la componente tangencial si es continua en la superficie de separación. La situación se muestra en la figura 3.1, donde \mathbf{E}_2 no es paralelo a \mathbf{E}_1 y la dirección de \mathbf{E} cambia en la frontera; se dice entonces que las líneas de campo eléctrico se refractan al pasar la frontera.

Un caso interesante es cuando en la superficie de separación entre un medio dieléctrico y el vacío, y además $\sigma = 0$. Si se usa la condición de frontera dada por la ecuación 1.66, tomando el medio 2 como el vacío, queda

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 - \mathbf{D}_1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}_2 - (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)] = 0,$$

o sea

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{P}_1}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

Es necesario recalcar que \mathbf{E} está determinado por todas las cargas; entonces por analogía en el caso de \mathbf{D} en la ecuación 1.66. se puede interpretar la ecuación 3.10, diciendo que la discontinuidad en la componente normal de \mathbf{E} proviene de la densidad de carga ligada, dada por

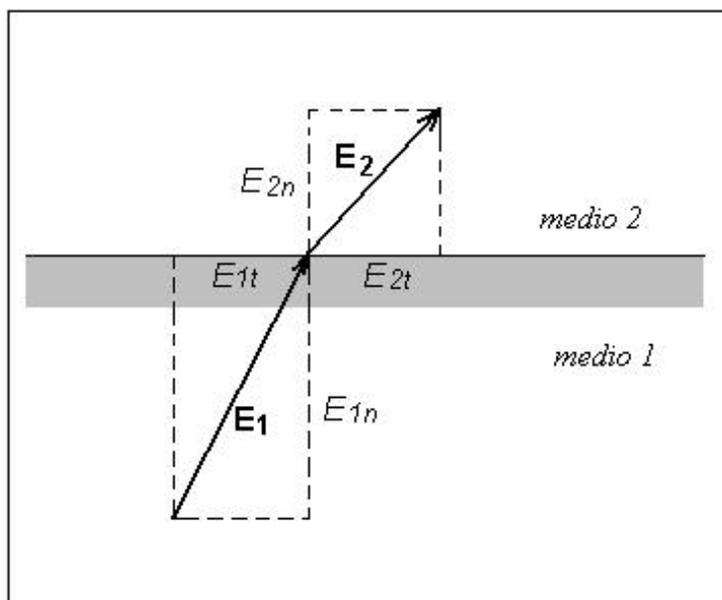


Figura 3.1: Comportamiento del campo eléctrico cuando pasa de un medio a otro.

$$\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

o sea

$$\sigma_p = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = P_n \quad (3.11)$$

Pudiéndose concluir que la densidad de carga ligada en la interface entre un dieléctrico polarizado y el vacío es de magnitud igual a la componente normal de la polarización.

3.4.1. Ejemplo 1

Campo eléctrico producido por de una carga puntual dentro de un dieléctrico l, i, h .

Considerando una carga puntual $+q$ en un dieléctrico l, i, h de extensión infinita, caracterizado por una permitividad relativa o constante dieléctrica κ_e .

Si la carga $+q$ se situara en el vacío, el campo eléctrico sería radial. Pero como \mathbf{E} , \mathbf{D} y \mathbf{P} , en cada punto, son todos paralelos entre sí, la naturaleza

3.4. DIELECTRICOS LINEALES ISOTRÓPICOS HOMOGÉNEOS (L, I, H) 65

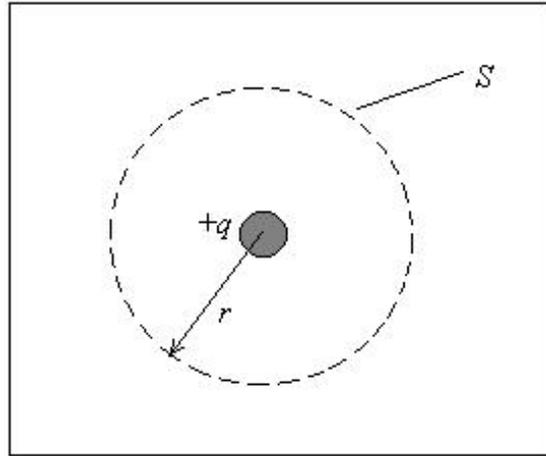


Figura 3.2: Carga puntual $+q$ dentro de un medio dieléctrico l, i, h .

radial del campo no cambia por la presencia del dieléctrico. Si se aplica la ley de Gauss, ecuación 1.28, e integrando ambas partes sobre la esfera de

radio r de la figura 3.2, se tiene
$$\iiint_{\text{esfera}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \iiint_{\text{esfera}} \rho dv = q;$$

aplicando el teorema de la divergencia se llega a

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = q,$$

entonces

$$4\pi r^2 D = q,$$

entonces

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Se puede escribir ahora

$$\mathbf{D} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3} \tag{3.12}$$

como

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa_e \mathbf{E};$$

entonces

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\kappa_e r^3} \quad (3.13)$$

y además

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) \mathbf{E},$$

se tiene que

$$\mathbf{P} = \frac{q\mathbf{r}(\kappa_e - 1)}{4\pi\kappa_e r^3} \quad (3.14)$$

En la ecuación 3.13 se puede apreciar que el campo eléctrico es menor en un factor κ_e de lo que sería si no existiera medio dieléctrico.

A continuación se hará un análisis más detallado de la situación; como el campo eléctrico tiene su origen tanto en la carga libre como la ligada. La carga libre es solamente $+q$ y la ligada viene dada por las ecuaciones 1.26 y 3.11

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \text{ y } \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

sobre la superficie del dieléctrico en contacto con la carga puntual. Se puede apreciar en la ecuación 3.14 que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = 0, \text{ ya que } \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0.$$

La carga puntual es un punto en el sentido macroscópico, realmente, es grande tomando como base una escala molecular, y se le puede asignar un radio b , que finalmente se hará tender a cero.

$Q_p = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}})_{r=b} = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 \left[\frac{q\mathbf{r}(\kappa_e - 1)}{4\pi\kappa_e r^3} \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_r) \right]_{r=b} = -\frac{(\kappa_e - 1)q}{\kappa_e}$; ahora la carga total será: $Q = Q_p + q = \frac{q}{\kappa_e}$. Puede verse ahora más claramente por qué el campo eléctrico es un factor κ_e menor de lo que sería sin la existencia del medio dieléctrico.

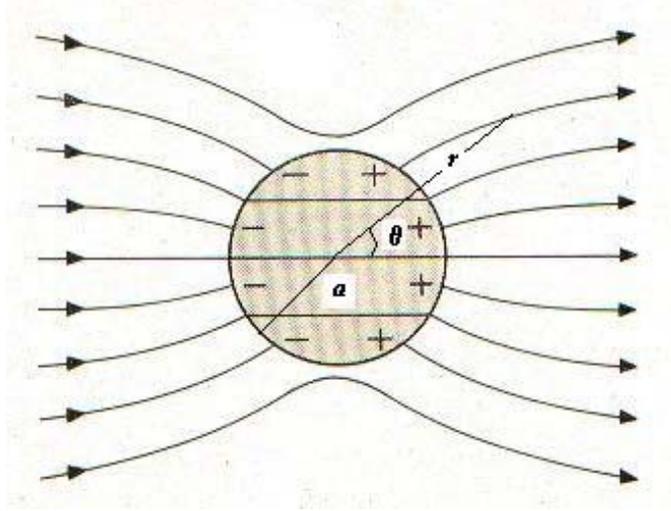


Figura 3.3: Un campo eléctrico se distorsiona por la presencia de una esfera dieléctrica, aquí se muestran las líneas de campo eléctrico.

3.4.2. Ejemplo 2

Esfera sólida dieléctrica dentro de un campo eléctrico inicialmente uniforme E_0 (figura 3.3)

El campo eléctrico se puede expresar como $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_z E_0$; se supondrá que el dieléctrico es l, i, h y que se caracteriza por una constante dieléctrica κ_e ; además no tiene cargas libres; por lo tanto el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.15)$$

Además por simetría se observa que $\Phi = \Phi(r, \theta)$. Tomando la solución general (2.42); para puntos fuera de la esfera

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \quad r \geq a \quad (3.16)$$

y para puntos dentro de la esfera

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A'_n r^n + B'_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (3.17)$$

entonces

$$\Phi_1(r, \theta) = A_0 + B_0 r^{-1} + A_1 r \cos \theta + B_1 r^{-2} \cos \theta + \dots$$

y

$$\Phi_2(r, \theta) = A'_0 + B'_0 r^{-1} + A'_1 r \cos \theta + B'_1 r^{-2} \cos \theta + \dots$$

Como en el caso de la esfera conductora solamente se necesitan los términos escritos. No se necesita el término r^{-1} (en ambos casos) puesto que su presencia implicaría carga neta en la esfera, o sea

$$B_0 = B'_0 = 0.$$

Como aparecen las constantes A_0 y A'_0 para los potenciales, que al calcular el campo se anulan, podemos hacerlos cero sin pérdida de generalidad o sea

$$A_0 = A'_0 = 0.$$

Una condición de frontera será:

$$\Phi_1(r, \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta = A_1 r \cos \theta \implies A_1 = -E_0 \quad (3.18)$$

Para $\Phi_2(r, \theta)$ el término que contiene r^{-2} implicaría que el potencial en el centro de la esfera fuera infinito y sería posible si existe un dipolo eléctrico en el centro de la esfera y en realidad este no es el caso; o sea

$$B'_1 = 0.$$

Por todo lo anterior los potenciales toman la forma:

$$\Phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + B_1 r^{-2} \cos \theta; \quad r \geq a \quad (3.19)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = A'_1 r \cos \theta; \quad r \leq a \quad (3.20)$$

Aplicando la condición de frontera:

$$E_{1t} = E_{2t} \implies E_{1\theta} |_{r=a} = E_{2\theta} |_{r=a} \implies -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} |_{r=a} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} |_{r=a}$$

entonces

$$-E_0 a \sin \theta + B_1 a^{-2} \sin \theta = A'_1 a \sin \theta,$$

3.4. DIELECTRICOS LINEALES ISOTRÓPICOS HOMOGÉNEOS (L, I, H)69

al simplificar llegamos a

$$E_0 a - \frac{B_1}{a^2} = -A'_1 a \quad (3.21)$$

Para el vector desplazamiento eléctrico la condición de frontera, al no existir carga libre en la superficie de la esfera, se convierte en:

$$D_{1n} = D_{2n} \implies D_{1r} |_{r=a} = D_{2r} |_{r=a} \implies -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} |_{r=a} = \kappa_e \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} |_{r=a}$$

entonces

$$\epsilon_0 E_0 \cos \theta + 2 \frac{B_1 \epsilon_0}{a^3} \cos \theta = \kappa_e \epsilon_0 A'_1 \cos \theta,$$

al simplificar queda

$$-E_0 - \frac{2B_1}{a^3} = \kappa_e A'_1 \quad (3.22)$$

De las ecuaciones 3.21 y 3.22 se obtiene las constantes B_1 y A'_1 :

$$B_1 = \frac{(\kappa_e - 1)}{(\kappa_e + 2)} a^3 E_0 \quad (3.23)$$

$$A'_1 = -\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \quad (3.24)$$

de tal manera que las soluciones para los potenciales se pueden escribir de la forma:

$$\Phi_1(r, \theta) = -E_0 \left[1 - \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] r \cos \theta; \quad r \geq a \quad (3.25)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = -\left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \right) r \cos \theta; \quad r \leq a \quad (3.26)$$

Las componentes del los campo eléctricos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} E_{1r} &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \theta \\ E_{1\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = -E_0 \left[1 - \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad r > a \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} E_{2r} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = \left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \right) \cos \theta \\ E_{2\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = -\left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad r < a \quad (3.28)$$

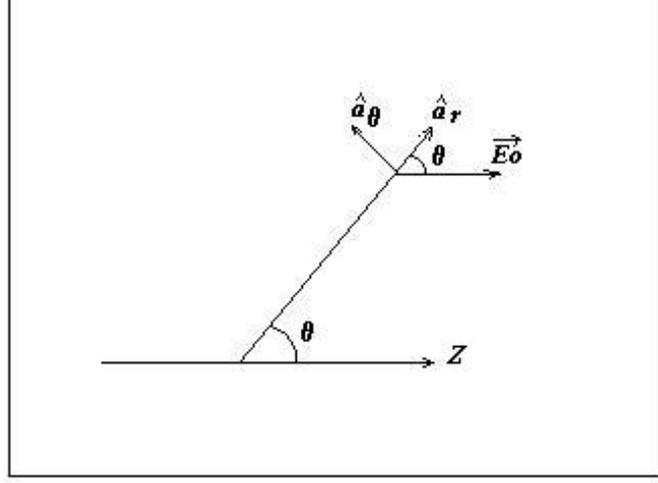


Figura 3.4: Esquema de los vectores en coordenadas esféricas.

Se comprueba a continuación que el campo eléctrico dentro de la esfera dieléctrica es paralelo al campo inicial. A partir de la figura 3.4 se tiene que:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - E_0 \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (3.29)$$

por otro lado

$$\mathbf{E}_2 = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - \left(\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \right) \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta = \left(\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \right) (E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - E_0 \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) \quad (3.30)$$

por lo tanto

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3\mathbf{E}_0}{\kappa_e + 2} \quad (3.31)$$

Además se puede apreciar que \mathbf{E}_1 no es perpendicular a la superficie esférica, como sucede en el caso de la esfera conductora.

El vector desplazamiento eléctrico viene dado por

$$\begin{aligned} D_{1r} &= \epsilon_0 E_{1r} = \epsilon_0 E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \theta \\ D_{1\theta} &= \epsilon_0 E_{1\theta} = -\epsilon_0 E_0 \left[1 - \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad r > a \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} D_{2r} &= \kappa_e \epsilon_0 E_{2r} = \kappa_e \epsilon_0 \left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \right) \cos \theta \\ D_{2\theta} &= \kappa_e \epsilon_0 E_{2\theta} = -\kappa_e \epsilon_0 \left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad r < a \quad (3.33)$$

3.4. DIELECTRICOS LINEALES ISOTRÓPICOS HOMOGÉNEOS (L, I, H) 71

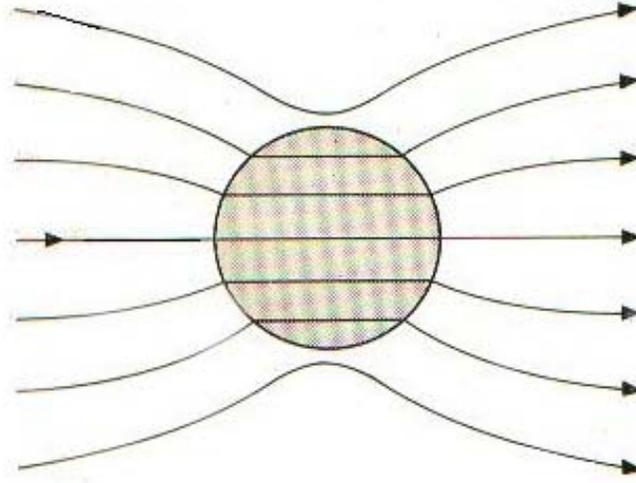


Figura 3.5: Líneas de campo para el vector \mathbf{D} .

Las líneas de campo para el vector desplazamiento eléctrico se ilustra en la figura 3.5

La polarización en la esfera se encuentra de la siguiente manera:

$$P_r = D_{2r} - \epsilon_0 E_{2r} = \frac{3\kappa_e \epsilon_0 E_0}{\kappa_e + 2} \cos \theta - \frac{3\epsilon_0 E_0}{\kappa_e + 2} \cos \theta$$

entonces

$$P_r = \frac{(\kappa_e - 1)}{(\kappa_e + 2)} 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) E_{2r}$$

$$P_\theta = D_{2\theta} - \epsilon_0 E_{2\theta} = \epsilon_0 \frac{(\kappa_e - 1)}{(\kappa_e + 2)} (-3E_0 \sin \theta) = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) E_{2\theta}.$$

Por lo tanto el vector polarización se escribe como:

$$\mathbf{P} = 3\epsilon_0 \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \mathbf{E}_0 \quad (3.34)$$

lo cual comprueba que para un dieléctrico l, i, h la polarización es paralela al campo que la produce.

Ahora se puede expresar \mathbf{E}_2 en términos de \mathbf{P} como:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3\mathbf{E}_0}{(\kappa_e + 2)} = \mathbf{E}_0 + \frac{3\mathbf{E}_0}{(\kappa_e + 2)} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0 - \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right) \mathbf{E}_0$$

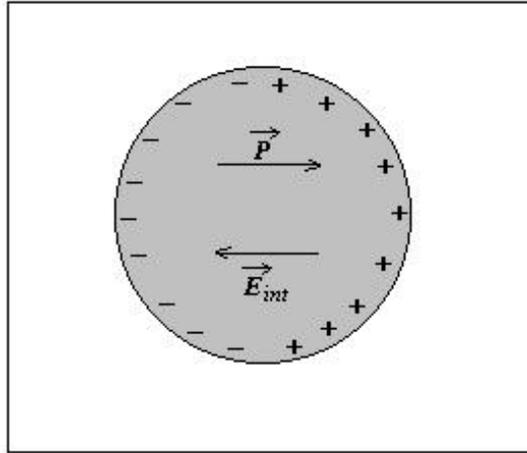


Figura 3.6: Aquí se ilustra la situación dentro de la esfera dieléctrica.

entonces

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.35)$$

O sea que el campo dentro de la esfera es menor que el que existía inicialmente; se puede decir que hay un campo denominado “campo interno” cuya expresión es:

$$\mathbf{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.36)$$

esta situación se ilustra en la figura 3.6

3.5. Cavity. “Definiciones” de \mathbf{E} y \mathbf{D} .

Los dos ejemplos anteriores ilustran la importancia que tienen las cargas ligadas en la superficie de separación entre un medio dieléctrico y el vacío. Si se considera el problema de calcular el campo dentro de una cavidad hecha dentro de un dieléctrico se puede observar que es bastante complicado, y el grado de complicación depende de la forma de la cavidad. Sin embargo para casos especiales los campos dentro de la cavidad son exactamente iguales a los valores de \mathbf{D} y \mathbf{E} en el dieléctrico. Siempre estos resultados fueron sugeridos por el uso de las definiciones experimentales de estos vectores, porque como

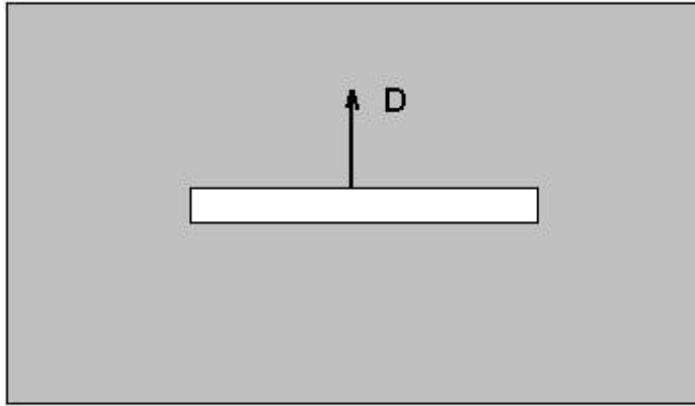


Figura 3.7: Cavidad dentro de un medio dieléctrico en forma de cilindro recto de pequeña altura, el campo eléctrico en el dieléctrico es paralelo a su eje.

se verá ellos indican la manera como determinar los vectores en el dieléctrico por medio de mediciones hechas en la cavidad.

La primera cavidad se muestra en la figura 3.7, es un pequeño cilindro recto cuya altura es muy pequeña comparada con el radio de la base y está hecho de manera que su base es perpendicular al campo del dieléctrico. Si se considera un punto cerca del centro de la cavidad, las orillas estarán demasiado lejos para afectar los campos, así que \mathbf{D}_c (*en la cavidad*) será paralelo a \mathbf{D} (*en el dieléctrico*). Puesto que por construcción las únicas componentes son las componentes normales, que son continuas, de acuerdo a la ecuación 1.67 se tiene que $\mathbf{D}_c = \mathbf{D}$, entonces

$$\mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{D}_c}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0}.$$

Si ahora se imagina una pequeña carga de prueba δq colocada en la cavidad y se mide la fuerza \mathbf{F} sobre ella, se tiene

$$\mathbf{F} = \delta q \mathbf{E}_c = \delta q \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0},$$

de tal manera que

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{F}}{\delta q},$$

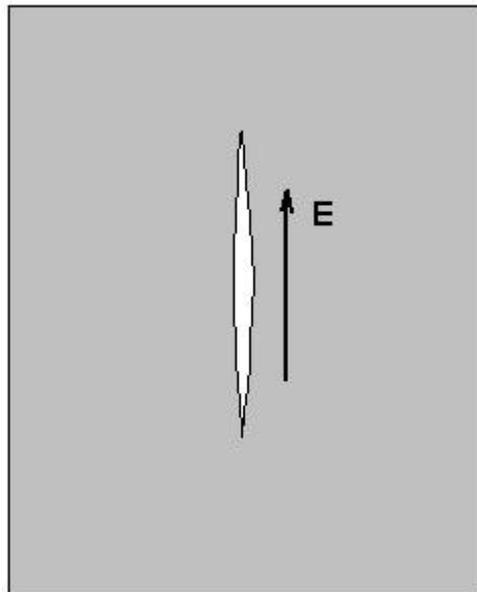


Figura 3.8: Cavidad alargada en forma de aguja en un medio dieléctrico, hecha paralela al campo eléctrico.

por lo tanto en principio se puede medir \mathbf{D} en el dieléctrico, midiendo la fuerza sobre una pequeña carga de prueba.

Ahora es vez de la cavidad anterior se supondrá una cavidad alargada en forma de aguja hecha con el eje paralelo a \mathbf{E} , como se ve en la figura 3.8. Cerca del centro de la cavidad los efectos de las esquinas serán despreciables y \mathbf{E}_c (*dentro de la cavidad*) será paralelo a \mathbf{E} (*en el dieléctrico*). Puesto que solamente se tienen componentes tangenciales, por construcción, y son continuas de acuerdo a la ecuación 1.69, de tal manera que

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}.$$

La medida de la fuerza en la carga de prueba colocada en esta cavidad permite escribir

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{F}}{\delta q}.$$

Por lo tanto para este tipo de cavidad se está en capacidad de conseguir la determinación de \mathbf{E} en el dieléctrico.

3.6. Energía Electroestática

En esta sección el objetivo es calcular la energía requerida para establecer una configuración de carga dada, comensado por calcular el trabajo W necesario para mover una carga puntual q_1 desde un punto a hasta otro b dentro del campo eléctrico producido por una carga puntual q_2 .

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q_1 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = U_b - U_a \quad (3.37)$$

donde U es la energía potencial del sistema de las dos cargas, r_b y r_a son las correspondientes separaciones. Si no se tiene en cuenta la constante aditiva se puede escribir la energía potencial debido a dos cargas puntuales como,

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (3.38)$$

donde r_{12} es la distancia de separación.

La energía total para un sistema de cargas puntuales será

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Recordando la ecuación 1.32, la última sumatoria es Φ_i , el potencial eléctrico en q_i debido a las demás cargas, o sea

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad (3.39)$$

como la carga eléctrica se clasifica en libre y ligada la ecuación 3.39 se escribe como

$$U_e = U_{e, libre} + U_{e, ligada} = \frac{1}{2} \sum_{i(f)} q_{i(f)} \Phi_i + \frac{1}{2} \sum_{i(b)} q_{i(b)} \Phi_i \quad (3.40)$$

la primera sumatoria se hace sobre las cargas libres y la segunda sobre las cargas ligadas. Es así como se puede dividir la energía de la distribución de carga, en una asociada a la distribución de carga libre y una asociada a la distribución de carga ligada. Es necesario recalcar que Φ_i es el potencial debido a todas las cargas.

Considerando sólo la carga libre y suponiendo una distribución continua de densidad ρ , se tiene

$$U_{e, libre} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \Phi dv \quad (3.41)$$

Usando las ecuaciones 1.28 y 3.41 queda

$$U_{e, libre} = \frac{1}{2} \iiint_V \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad (3.42)$$

Usando el hecho que

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

y además

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi = \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D},$$

de la ecuación 3.42 se llega a

$$\begin{aligned} U_{e, libre} &= \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv + \frac{1}{2} \iint_{S, cerrada} \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para una distribución finita de carga y para puntos lejanos de ella, se cumple que

$$\Phi \sim \frac{1}{r}, |\mathbf{D}| \sim \frac{1}{r^2}, Area \sim r^2,$$

entonces

$$\iint_{S, cerrada} \Phi \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0, \text{ si } r \rightarrow \infty,$$

convirtiéndose la ecuación 3.43 en

$$U_{e, libre} = \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv \quad (3.44)$$

Ahora la energía por unidad de volumen viene dada por

$$u_{e,f} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} : \text{Densidad de energía electrostática (libre)} \quad (3.45)$$

Este es un resultado general, en el caso de que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, la ecuación 3.45 se convierte en

$$u_{e,f} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} \quad (3.46)$$

Se tratará ahora la energía asociada a las cargas ligadas, y asumiendo una distribución continua de densidad $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Similarmente como en el caso anterior, se puede decir que,

$$\begin{aligned} U_{e, ligada} &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho_p \Phi dv = \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_V \Phi \nabla \cdot \mathbf{P} dv = -\frac{1}{2} \iiint_{Dieléctrico} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dv \end{aligned} \quad (3.47)$$

la densidad de energía asociada a la polarización será:

$$u_{e,b} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_e E^2 \quad (3.48)$$

El factor $\frac{1}{2}$ en las expresiones anteriores se debe a que el cálculo se hace por grupo de cargas.

Un caso muy interesante es el de un grupo de cargas en presencia de un campo eléctrico externo, o sea

$$U'_{e, libre} = \sum_{i(f)} q_{i(f)} \Phi_{ext.} \rightarrow \iiint_{V_f} \rho \Phi_{ext.} dv = \iiint_{V_f} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_{ext.} dv \quad (3.49)$$

$$U'_{e, ligado} = \sum_{i(b)} q_{i(b)} \Phi_{ext.} \rightarrow \iiint_{V_b} \rho_p \Phi_{ext.} dv = - \iiint_{V_b} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{ext.} dv \quad (3.50)$$

donde $\Phi_{ext.}$ y $\mathbf{E}_{ext.}$ son producidos por un sistema externo de cargas.

3.6.1. Ejemplo 3

Energía de un dipolo eléctrico permanente en un campo eléctrico externo

Considerando un dipolo eléctrico permanente con la la carga positiva en la posición $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ y la negativa en \mathbf{r} , como se muestra en la figura 3.9; el momento dipolar eléctrico será $\mathbf{p} = qd\mathbf{r}$, utilizando la primera parte de la ecuación 3.50

$$U'_{e, dipolo} = -q\Phi_{ext.}(\mathbf{r}) + q\Phi_{ext.}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = q[\Phi_{ext.}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \Phi_{ext.}(\mathbf{r})] \quad (3.51)$$

entonces

$$U'_{e, dipolo} = qd\Phi_{ext.} = qd\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_{ext.} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext.} \quad (3.52)$$

Ahora, utilizando la segunda parte de la ecuación 3.50

$$U'_{e, dipolo} = - \iiint_{dipolo} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{ext.} dv = -\mathbf{E}_{ext.} \cdot \iiint_{dipolo} \mathbf{P} dv = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext.} \quad (3.53)$$

igual que el resultado anterior.

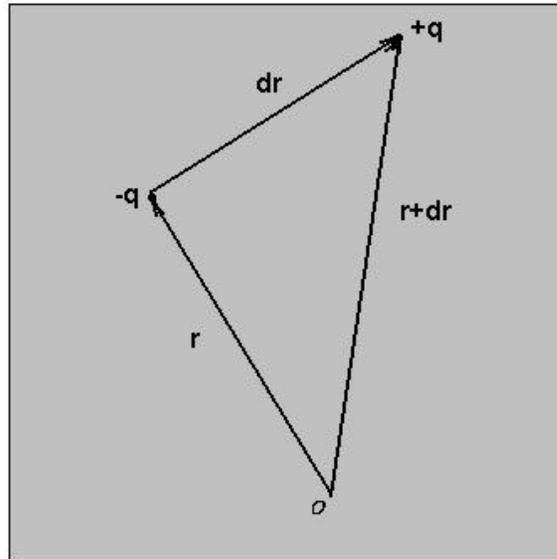


Figura 3.9: Dipolo eléctrico permanente.

3.7. Problemas

1. Dos medios dieléctricos con constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 se separan por una superficie plana. No hay carga libre en la superficie de separación. Hállese una relación entre los ángulos θ_1 y θ_2 , siendo éstos los ángulos que forman una recta arbitraria de desplazamiento eléctrico con la normal a la superficie en cada uno de los respectivos medios.
2. Dos grandes placas conductoras paralelas están separadas una distancia d . El espacio entre ellas contiene un material dieléctrico de constante κ_e . La densidad de carga libre es σ en una placa y $-\sigma$ en la otra. Hallar el valor de \mathbf{P} en el dieléctrico y la densidad de carga ligada en la superficie del dieléctrico en contacto con la placa cargada positivamente.
3. Considerando el ejemplo 2 demostrar que el campo eléctrico producido, en el centro de una esfera dieléctrica, por la carga ligada superficial es exactamente $-\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$, como lo predice la ecuación 3.36.
4. Dos cargas puntuales q y $-q$ están inicialmente en el vacío separadas una distancia a . Una losa de dieléctrico de espesor $d < a$ se introduce en medio de las dos, con las caras perpendiculares a la línea que une a las cargas. Demostrar cualitativamente que la fuerza sobre q es incrementada.

5. Se tiene un condensador esférico de radio interno a y radio externo b , el espacio entre las esferas conductoras se llena con dieléctrico de la siguiente manera: un dieléctrico de constante κ_1 entre a y c y otro de constante κ_2 entre c y b . Demostrar que la capacitancia es

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{1}{\kappa_1 a} - \frac{1}{\kappa_2 b} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) \right]^{-1}$$

6. Demostrar que si la densidad de carga libre es cero, la densidad de carga ligada en un dieléctrico (l, i, h) es siempre cero.

7. Evaluando la ecuación 3.44 en la región entre las placas de un condensador de placas paralelas y que está a una diferencia de potencial $\Delta\Phi$, demostrar que la energía almacenada es $\frac{1}{2}C(\Delta\Phi)^2$.

8. Una esfera conductora de radio R en el vacío, tiene carga q uniformemente distribuida en su superficie. Demostrar que la energía electrostática de la distribución es $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

9. Una varilla delgada de dieléctrico de sección A se extiende sobre el eje X , desde $x = 0$ hasta $x = L$. La polarización de la varilla es a lo largo de su longitud y está dada por $P_x = ax^2 + b$. Hállese la densidad volumétrica de carga ligada y la carga ligada superficial en cada extremo. Demuestre explícitamente que la carga ligada total se anula en este caso.

10. Un cubo de dieléctrico de lado L tiene una polarización radial dada por $\mathbf{P} = A\mathbf{r}$, siendo A una constante, y $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}_x x + \hat{\mathbf{u}}_y y + \hat{\mathbf{u}}_z z$. El origen de coordenadas está en el centro del cubo. Hállese todas las densidades de carga ligada, y demuéstrese explícitamente que la carga total se anula.

11. Demuéstrse la siguiente relación entre la polarización \mathbf{P} y las densidades de carga ligada ρ_p y σ_p , para una muestra de dieléctrico de volumen V y superficie S .

$$\iiint_V \mathbf{P} dv = \iiint_V \rho_p \mathbf{r} dv + \iint_{\text{cerrada, } S} \sigma_p \mathbf{r} da$$

Aquí $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}_x x + \hat{\mathbf{u}}_y y + \hat{\mathbf{u}}_z z$ es el vector posición desde cualquier origen fijo. [Sugerencia: desarrollese $\nabla \cdot (x\mathbf{P})$]

12. Un conductor cilíndrico largo de radio a , que tiene una carga λ por unidad de longitud, se sumerge en un medio dieléctrico de permitividad constante ϵ . Hállese el campo eléctrico a una distancia $r > a$ del eje del cilindro.

13. Un cilindro dieléctrico largo de radio a y constante dieléctrica κ_e se coloca en un campo eléctrico uniforme \mathbf{E}_0 . El eje del cilindro se orienta normalmente

con la dirección de \mathbf{E}_0 . El cilindro no tiene cargas libres, determínese el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores al cilindro.

14. Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia d y se mantienen a la diferencia de potencial $\Delta\Phi$. Se pone entre las placas una plancha dieléctrica, de constante κ_e y de espesor $t < d$. determínese los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} en el dieléctrico y también en el vacío entre el dieléctrico y una placa. Despreciese los efectos de borde debido a la tamaño finito de las placas.

15. Dos placas conductoras paralelas se encuentran separadas por una distancia d y se mantienen a la diferencia de potencial $\Delta\Phi$. Una plancha dieléctrica, de constante dieléctrica κ_e y de espesor d , se ajusta entre las placas; sin embargo ésta no llena completamente el volumen que hay entre dichas placas. Hállese el campo eléctrico en el dieléctrico y en la región de vacío entre las placas. Hállese la densidad de carga σ en la parte de la placa en contacto con el dieléctrico y en contacto con el vacío. Hállese σ_p sobre la superficie de la plancha dieléctrica.

16. Una esfera conductora de radio R flota sumergida a la mitad en un medio dieléctrico líquido de permitividad ϵ_1 . La región por encima del líquido es un gas de permitividad ϵ_2 . La carga libre total sobre la esfera es Q . Hállese un campo eléctrico radial del inverso del cuadrado que satisfaga todas las condiciones de frontera y determínese las densidades de carga libre, ligada y total en todos los puntos sobre la superficie de la esfera. Formúlese un argumento para demostrar que este campo eléctrico es el existente.

17. Un campo eléctrico uniforme \mathbf{E}_0 se forma en un medio de constante dieléctrica κ_e . Demuéstrese que el campo en una cavidad esférica en el medio es:

$$\mathbf{E} = \frac{3\kappa_e \mathbf{E}_0}{2\kappa_e + 1}$$

18. Se dá una distribución esférica de carga de radio R y densidad uniforme de carga ρ_0 . Determínese la energía de la distribución de dos formas (a) Por integración directa de la ecuación 3.41 (b) Por una integración sobre el campo, ecuación 3.44.

3.8. Problemas Varios Capítulo 3

1. La carga total de polarización contenida en un volumen de material dieléctrico polarizado es nula. Demuéstre esta afirmación a partir de integrales de

superficie y de volumen de las expresiones correspondientes. compruebe este hecho en el caso de un aislador sólido de radio b y longitud L , cuya base reposa sobre el plano XY . El dieléctrico es (l, i, h) , y está sometido a un campo dado por: $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_R R^2 \cos \phi + \hat{\mathbf{u}}_z z^2$

2. Una esfera dieléctrica de radio R tiene una densidad uniforme de carga libre ρ_0 . Demostrar que el potencial en el centro de la esfera es: $\Phi(0) = \frac{(2\kappa_e + 1)\rho_0 R^2}{2\kappa_e 3\epsilon_0}$; κ_e es la constante dieléctrica.

3. Una esfera dieléctrica de radio R está polarizada de forma que $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{d}{r}$, siendo $\hat{\mathbf{u}}_r$ el vector unitario radial.

(a) Calcular la densidad volumétrica de carga ligada

(b) Calcular la densidad volumétrica de carga libre

(c) Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera

(d) Hacer la grafica de $\Phi(r)$ desde $r = 0$ a $r \rightarrow \infty$

4. Se dá una cáscara esférica de dieléctrico (radio interior a y radio exterior b) y una carga puntual q , infinitamente separada, colóquese la carga puntual en el centro de la cáscara de dieléctrico. Determínese el cambio en la energía del sistema.

5. Una concha cilíndrica (infinita en la dirección Z) de un material dieléctrico de constante dieléctrica κ_e , y radios interior y exterior a y b ($b > a$) respectivamente. Se introduce en un campo eléctrico uniforme \mathbf{E}_0 y perpendicular al eje del cilindro. El medio dentro y fuera de la concha es vacío ($\kappa_e = 1$).

(a) Determinar el potencial y el campo eléctrico en cada una de las tres regiones: $r < a$, $a < r < b$, $r > b$.

(b) Discutir los casos límites $a \rightarrow 0$ y luego $b \rightarrow \infty$.

Capítulo 4

Campos y Corrientes Estacionarios

4.1. Introducción

El caso estacionario que se tratará a continuación está determinado por las siguientes condiciones $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$, pero $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, la última expresión implica que no hay acumulación de carga en la región

Para la situación que se estudiará ahora las ecuaciones de Maxwell a utilizar son las siguientes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ y } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.1)$$

4.2. Condiciones de Frontera

Partiendo de la primera de las ecuaciones de la expresión 4.1

$$\iint_{\text{cerrada } S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0$$

tomando como superficie el pequeño cilindro de la figura 4.1, similarmente como se procedió en el caso eléctrico se tiene que: $B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0$, entonces

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (4.2)$$

Esto quiere decir que la componente normal de la inducción magnética es continua cuando atraviesa una superficie de separación. También se puede

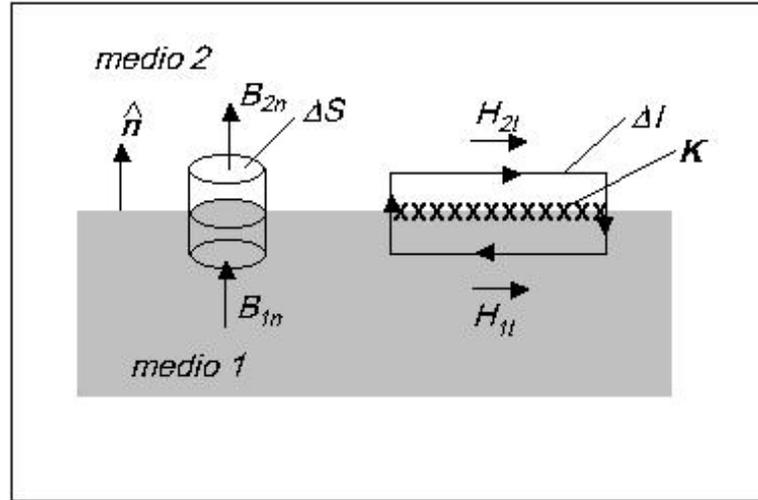


Figura 4.1: Condiciones de frontera para el caso magnético.

escribir como

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (4.3)$$

Tomando en cuenta la segunda ecuación de la expresión 4.1

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} da = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} da = I$$

tomando como la trayectoria C el rectángulo mostrado en la figura 4.1 $H_{2t}\Delta l - H_{1t}\Delta l = K\Delta l$, donde K es la componente de la corriente superficial normal al plano de la trayectoria; de donde

$$H_{2t} - H_{1t} = K \quad (4.4)$$

o también

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (4.5)$$

La discontinuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} es igual a la densidad superficial de corriente.

Hasta ahora se había considerado solamente la situación estática, en la cual todas las cargas están en reposo relativo y en particular se encuentra que es imposible que dentro de un conductor exista un campo eléctrico. Por otra

parte al aplicar una diferencia de potencial a un conductor y suministrarle energía continuamente produciéndose un movimiento estable de carga eléctrica, esto es, hay corriente eléctrica en el conductor. Este movimiento de carga implica la existencia de un campo eléctrico dentro del conductor.

El campo eléctrico conservativo no puede abastecer de energía a las cargas en el circuito cerrado; por consiguiente en alguna parte del circuito deben estar las fuentes de energía. Las más familiares de estas fuentes son las baterías; ellas abastecen de energía a las cargas a través de reacciones químicas, si bien no es inmediatamente evidente, son efectos esencialmente electromagnéticos. Por simplicidad se dará por sentado desde ahora, que no hay ninguno de estos campos eléctricos no conservativos dentro de algunas regiones que estaran considerando, de modo que es válida la ecuación $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, tal región será el interior de un conductor con corriente.

Por ahora, se va a considerar solamente el caso estacionario en el cual $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$, pero $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, como se indica en la introducción no hay acumulación de carga en la región. Entonces, por la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.6)$$

Si se recuerda, que las condiciones de frontera de la ecuación 4.3 se obtienen a partir de la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; se puede escribir unas condiciones similares para \mathbf{J} en la superficie de separación de dos medios

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0 \quad (4.7)$$

También se tiene la definición de \mathbf{J} , la corriente total a través de una superficie S es

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (4.8)$$

La principal ley experimental en este campo es la ley de Ohm, la cual es válida bastante bien para metales y soluciones electrolíticas, pero no es una relación universal. Tal ley se expresa como

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (4.9)$$

Donde I es la corriente, $\Delta\Phi$ la diferencia de potencial entre los puntos del conductor en cuestión, y R es un factor de proporcionalidad llamado la resistencia del conductor y está medida en ohmios (Ω) y puede depender

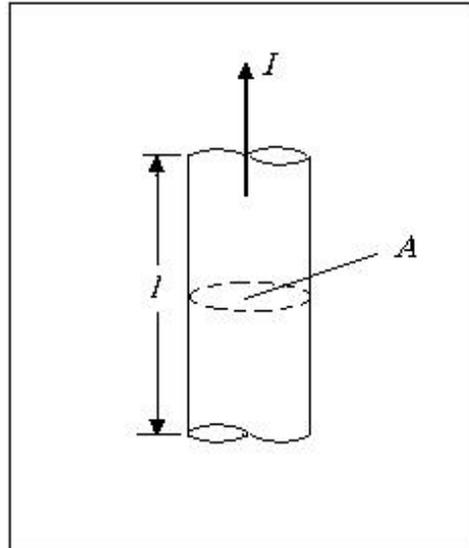


Figura 4.2: Tramo de un conductor cilíndrico de sección A que lleva una corriente I a través de su longitud.

de la temperatura, pero de otro modo puede considerarse constante y, en particular es independiente del campo. Es conveniente convertir la ecuación 4.9 en otra en términos de \mathbf{J} .

Considerando el volumen cilíndrico pequeño en el conductor mostrado en la figura 4.2. Experimentalmente se tiene que R es proporcional a la longitud e inversamente proporcional a el área de la sección transversal, esto es

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{gA} \quad (4.10)$$

El factor de proporcionalidad ρ es el llamado resistividad del material, y g la conductividad del mismo. Sustituyendo la ecuación 4.10 la ecuación 4.9, utilizando la ecuación 4.8 y el hecho que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$; se tiene que:

$$\frac{I}{A} = g \left(\frac{\Delta\Phi}{l} \right) \implies J = gE$$

donde E es el campo eléctrico dentro del conductor, si se toma el caso de conductores isotrópicos, la ley de Ohm se expresa como

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (4.11)$$

Con el uso de la ecuación 4.11 se puede escribir ahora la ecuación 4.7 como

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (g_2 \mathbf{E}_2 - g_1 \mathbf{E}_1) \quad (4.12)$$

Si comparamos la ecuación 4.12 con las ecuaciones para las condiciones de frontera para el campo eléctrico \mathbf{E} dada por las siguientes expresiones:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0 \text{ y } \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$$

Observamos que se tiene una situación similar; de aquí que las líneas de campo están refractadas cuando atraviesan el límite entre dos medios.

También para un conductor homogéneo, se encuentra que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \implies \nabla \cdot (g\mathbf{E}) = 0 \implies -g\nabla \cdot \nabla\Phi = 0 \implies \nabla^2\Phi = 0$$

lo que quiere decir que, para corriente estacionarias el potencial eléctrico satisface la ecuación de Laplace.

Este hecho es la base de una forma experimental de resolver la ecuación de Laplace que establece los valores de Φ en el límite de una región conductora. Entonces si se mide la magnitud y dirección de la corriente, se puede determinar el campo eléctrico en toda la región por el uso de la ecuación 4.11.

El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una carga q es movida entre dos puntos, cuya diferencia de potencial es $\Delta\Phi$, está determinado por $W = -q\Delta\Phi$. Para corrientes estacionarias, ésta energía consumida aparece como calor, y la energía puede ser constantemente suministrada por las fuentes externas para mantener el estado estacionario. Se puede también tener ésta reacción en términos de cantidades microscópicas. Si el trabajo W es ejecutado en un tiempo t en el volumen de la figura 4.2, la producción de calor por unidad de volumen y unidad de tiempo, w es:

$$w = \frac{W}{tAl} = -\frac{q\Delta\Phi}{tAl} = \left(\frac{I}{A}\right) \left(-\frac{\Delta\Phi}{l}\right) = JE$$

usando la ecuación 4.11 se puede escribir

$$w = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = gE^2 = \frac{J^2}{g} \quad (4.13)$$

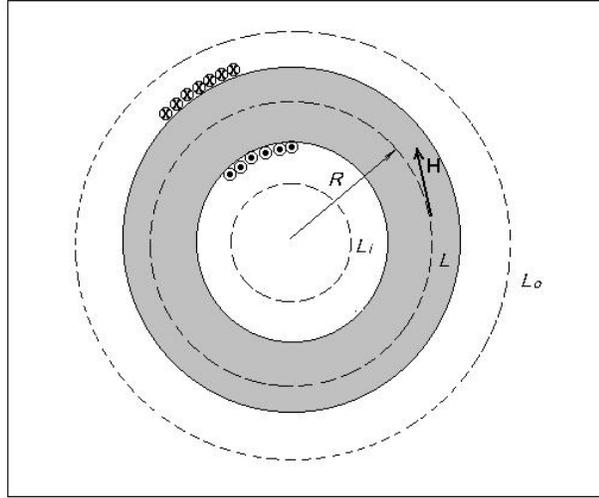


Figura 4.3: Campo magnético producido por una bobina toroidal.

4.3. Magnetostática

Cuando los campos son constantes en el tiempo, las ecuaciones de Maxwell que se utilizarán serán las determinadas por la ecuación 4.1.

Si el problema posee suficiente simetría, con frecuencia puede ser resuelto muy fácilmente utilizando estas ecuaciones directamente.

4.3.1. Ejemplo 1

Campo magnético de una bobina toroidal.

Suponiendo una corriente I que fluye a través de un conductor el cual es devanado alrededor de un toro de sección transversal pequeña. En la figura 4.3 se muestra un número de vueltas; el radio del círculo formado por el eje del toro es R .

Por simetría, \mathbf{H} está dirigido a lo largo de la circunferencia concéntrica con el círculo axial y debe tener magnitud constante en esta circunferencia. Si calculamos la integral de línea de \mathbf{H} alrededor de la trayectoria llamada L y usando la ecuación 4.1 encontramos

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \oint_L dl = HL = H2\pi R = \iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = NI$$

Entonces

$$H = \frac{NI}{2\pi R} \quad (4.14)$$

Si el diámetro de la sección transversal del toro es pequeño comparado con R , todas las trayectorias similares a través del toro tienen aproximadamente la misma circunferencia por lo tanto H será aproximadamente constante sobre la sección transversal del toro.

Si calculamos $\oint_{L_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, encontramos $H_i L_i = 0$, puesto que no hay corriente encerrada por la trayectoria, por consiguiente $H_i = 0$.

Integrando sobre la trayectoria L_0 , encontramos también que $H_0 L_0 = 0$ y $H_0 = 0$, puesto que cada corriente que pasa en una dirección sale en la dirección contraria, dando una corriente total nula.

Así se observa que el campo producido por una bobina toroidal está solamente dentro del toro, si hay vacío dentro del toro, se tiene que

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \quad (4.15)$$

De manera similar a lo visto en materiales dieléctricos, se puede definir un material magnético lineal, isotrópico y homogéneo por la ecuación

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (4.16)$$

donde χ_m es susceptibilidad magnética. En el caso magnético \mathbf{M} está escrito como proporcional a \mathbf{H} , más bien que a \mathbf{B} . A \mathbf{M} se denomina vector *magnetización*. Se aclara además, que un material el cual es lineal, isotrópico y homogéneo es sus propiedades magnéticas no necesita ser así en sus propiedades eléctricas, y viceversa.

Los materiales magnéticos más conocidos, tal como el hierro, no pueden ser descritos por la ecuación 4.16 y ellos tienen mucho más complicado el funcionamiento; la susceptibilidad magnética puede ser negativa como positiva.

Para el caso en que la ecuación sea satisfecha tenemos:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (4.17)$$

donde $\kappa_m = 1 + \chi_m$ es la permeabilidad realtiva y $\mu = \kappa_m \mu_0$ es la permeabilidad absoluta.

Si el toro es ahora llenado completamente con un material (l, i, h) magnético e I permanece constante, en la ecuación 4.14 observamos que H no varía,

mientras que B toma el valor de $\kappa_m \mu_0 H$. La proporción de los dos valores de B , con o sin material magnético, es κ_m ; este resultado es la base para un método de como medir la permeabilidad magnética.

4.4. Potencial Escalar Magnético

Si $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, entonces $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ y se puede escribir que $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$. Si adicionamos que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$; siendo μ constante, se tiene también que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = -\mu \nabla^2 \Phi_m.$$

así que

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \tag{4.18}$$

Se puede concluir que en ausencia de corriente reales y materiales (l, i, h) magnético, \mathbf{H} puede derivarse de un potencial escalar, el cual satisface la ecuación de Laplace.

De este resultado, muchos problemas magnéticos pueden ser resueltos haciendo uso de su analogía aproximada con los problemas electrostáticos.

Las condiciones de frontera serán las ecuaciones 4.2 y 4.4 con $\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

4.5. Problemas con Valores en la Frontera

Se va considerar dos casos

(i) Material magnético lineal o “aproximadamente lineal” para el cual $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

(ii) Una pieza uniformemente magnetizada para el que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. Para ambos casos $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, por lo tanto se tiene que $\nabla^2 \Phi_m = 0$ (ecuación de Laplace). De donde se puede deducir a \mathbf{H} y además como $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ o $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

4.5.1. Ejemplo 2

Esfera de material magnético lineal de radio a y permeabilidad μ , colocada en un campo magnético inicialmente uniforme \mathbf{B}_0 .

Solución: Considerando a $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{u}}_z$; la solución de la ecuación de Laplace es en este caso similar al problema de la esfera dieléctrica que se trató en el ejemplo 2 del capítulo 3. de tal manera que las soluciones adecuadas serán

$$\Phi_{m1}(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad \text{para } r > a \quad (4.19)$$

$$\Phi_{m2}(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad \text{para } r < a \quad (4.20)$$

Una de las condiciones de frontera será:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{u}}_z \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \implies \mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{u}}_z \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty;$$

de tal manera que

$$\Phi_{m1} = -\frac{B_0}{\mu_0} z \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \implies \Phi_{m1} = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty;$$

comparando con la ecuación 4.19 se obtiene que:

$$A_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} \quad (4.21)$$

Como Φ_{m2} y campo magnético asociado no pueden ser infinitos en ningún punto (en particular $r = 0$). De la ecuación 4.20 se tiene que

$$C_2 = 0 \quad (4.22)$$

Remplazando las expresiones 4.21 y 4.22 en las ecuaciones 4.19 y 4.20 queda

$$\Phi_{m1}(r, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad r > a \quad (4.23)$$

$$\Phi_{m2} = A_2 r \cos \theta \quad r < a \quad (4.24)$$

Aplicando las condiciones de frontera para $r = a$

$$H_{1\theta} |_{r=a} = H_{2\theta} |_{r=a} \quad \text{y} \quad B_{1r} |_{r=a} = B_{2r} |_{r=a} \quad (4.25)$$

entonces

$$\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial \theta}\right)_{r=a} \quad \text{y} \quad \mu_0 \left(-\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial r}\right)_{r=a} = \mu \left(-\frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial r}\right)_{r=a}$$

entonces

$$-\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \quad \text{y} \quad B_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_1}{a^3} \cos \theta = -\mu A_2 \cos \theta$$

entonces

$$A_2 = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{C_1}{a^3} \quad \text{y} \quad B_0 + 2\mu_0 \frac{C_1}{a^3} = -\mu A_2 \quad (4.26)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a

$$C_1 = \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{(\mu + 2\mu_0)} B_0 a^3 \quad \text{y} \quad A_2 = -\frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} \quad (4.27)$$

Reemplazando la ecuación 4.27 en 4.23 y 4.24

$$\Phi_{m1}(r, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{B_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{(\mu + 2\mu_0)} \quad (4.28)$$

y

$$\Phi_{m2}(r, \theta) = -\frac{3B_0 r \cos \theta}{\mu + 2\mu_0} \quad (4.29)$$

Ahora

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \nabla \Phi_1 = -\mu_0 \left(\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \theta} \right)$$

entonces

$$\mathbf{B}_1(r, \theta) = \hat{\mathbf{u}}_r \left[B_0 \cos \theta + \frac{2B_0 a^3 \cos \theta}{r^3} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_0} + 2\right)} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\theta \left[-B_0 \sin \theta + \frac{B_0 a^3 \sin \theta}{r^3} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_0} + 2\right)} \right]$$

De tal manera que:

$$\mathbf{B}_1(r, \theta) = (\hat{\mathbf{u}}_r B_0 \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta B_0 \sin \theta) + \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_0} + 2\right)} \left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0 (\hat{\mathbf{u}}_r 2 \cos \theta + \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta)$$

finalmente se escribe

$$\mathbf{B}_1(r, \theta) = B_0 \hat{\mathbf{u}}_z + \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_0} + 2\right)} \left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0 (\hat{\mathbf{u}}_r 2 \cos \theta + \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta); \quad r > a \quad (4.30)$$

Para puntos dentro de la esfera:

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = -\mu \nabla \Phi_{m2} = -\mu \left(\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial \theta} \right)$$

entonces

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = - \left[-\hat{\mathbf{u}}_r \frac{3B_0 \cos \theta}{\left(1 + \frac{2\mu_0}{\mu}\right)} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{3B_0 \sin \theta}{\left(1 + \frac{2\mu_0}{\mu}\right)} \right]$$

luego

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = \frac{3}{\left(1 + \frac{2\mu_0}{\mu}\right)} (\hat{\mathbf{u}}_r B_0 \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta B_0 \sin \theta)$$

por consiguiente

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = \frac{3B_0 \hat{\mathbf{u}}_z}{\left(1 + \frac{2\mu_0}{\mu}\right)}; \quad r < a \quad (4.31)$$

4.5.2. Ejemplo 3

Campo magnético producido por una esfera magnetizada uniformemente. de magnetización M y radio a , cuando no están presentes otros campos magnéticos.

Solución: Por la simetría del problema se puede considerar la magnetización en la dirección del eje Z y como se ha comentado inicialmente en este caso también se cumple que $\nabla^2 \Phi_m = 0$ y $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$, pudiendo decir que la solución de la ecaución de Laplace más adecuada es:

$$\Phi_{m1}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\theta); \quad r > a \quad (4.32)$$

$$\Phi_{m2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\theta); \quad r < a \quad (4.33)$$

Para Φ_{m1} no se ha considerado potencias positivas de r , puesto que haría infinito para puntos lejanos y para Φ_{m2} no se ha considerado potencias negativas de r , puesto que se haría infinito en el centro de la esfera.

Aplicando las condiciones de frontera en $r = a$. $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ y $B_{1r} = B_{2r}$, entonces de la primera expresión se tiene que

$$\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial \theta}\right)_{r=a}$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a} C_{1n} a^{-(n+1)} \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a} A_{2n} a^n \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} \right)$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) a^{-1} \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (4.34)$$

Utilizando la segunda condición de frontera

$$\mu_0 (H_{1r})_{r=a} = \mu_0 (H_{2r} + M_r)_{r=a}$$

entonces

$$\mu_0 \left(-\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial r} \right)_{r=a} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial r} + M \cos \theta \right)_{r=a}$$

de donde

$$\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} P_n(\theta) = -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} n a^{n-1} P_n(\theta) + \mu_0 M \cos \theta$$

finalmente

$$C_{10} a^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta) [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] - M \cos \theta = 0 \quad (4.35)$$

Como cada Polinomio de Legendre $P_n(\theta)$ es una función distinta de θ , son además linealmente independientes, entonces, para que las ecuaciones 4.34 y 4.35 sean válidas, cada uno de los términos en que interviene un $P_n(\theta)$ o $\frac{dP_n}{d\theta}$ debe anularse individualmente.

De la ecuación 4.34, para $n=0$, $\frac{dP_0}{d\theta} = 0$ y de la ecuación 4.35, para $n=0$, $C_{10} a^{-2} = 0 \implies C_{10} = 0$ y A_{20} es indeterminada; pero como A_{20} es el término constante en el potencial; puede igualarse a cero sin afectar a \mathbf{H} y \mathbf{B} .

Para $n=1$, de las ecuaciones 4.34 y 4.35 se tiene $C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0$ y $2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0$. Resolviendo este par de ecuaciones se obtiene

$$C_{11} = \frac{1}{3} M a^3 \text{ y } A_{21} = \frac{1}{3} M$$

Para todo $n \geq 2$, los únicos C_{1n} y A_{2n} compatibles con las ecuaciones 4.34 y 4.35 son $C_{1n} = 0$ y $A_{2n} = 0$.

En definitiva los potenciales quedaran

$$\Phi_{m1}(r, \theta) = \frac{1}{3}M \left(\frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta; \quad r > a \quad (4.36)$$

$$\Phi_{m2}(r, \theta) = \frac{1}{3}Mr \cos \theta; \quad r < a \quad (4.37)$$

Ahora

$$\mathbf{H}_1(r, \theta) = -\nabla \Phi_{m1}(r, \theta) = -\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial r} - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \theta}$$

entonces

$$\mathbf{H}_1(r, \theta) = \frac{1}{3}M \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\hat{\mathbf{u}}_r 2 \cos \theta + \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta); \quad r > a \quad (4.38)$$

$$\mathbf{H}_2(r, \theta) = -\nabla \Phi_{m2}(r, \theta) = -\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial r} - \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial \theta}$$

de donde

$$\mathbf{H}_2(r, \theta) = -\frac{1}{3}M (\hat{\mathbf{u}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta) = -\frac{1}{3}M \hat{\mathbf{u}}_z = -\frac{1}{3}\mathbf{M} \quad (4.39)$$

Para la inducción magnética \mathbf{B} , se tiene $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 \implies$

$$\mathbf{B}_1(r, \theta) = \frac{\mu_0 M}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\hat{\mathbf{u}}_r 2 \cos \theta + \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin \theta); \quad r > a \quad (4.40)$$

y

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 (\mathbf{H}_2 + \mathbf{M}) = \mu_0 \left(-\frac{1}{3}\mathbf{M} + \mathbf{M} \right)$$

entonces

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}; \quad r < a \quad (4.41)$$

Las líneas de campo tanto de \mathbf{B} como \mathbf{H} se indican en la figura 4.4

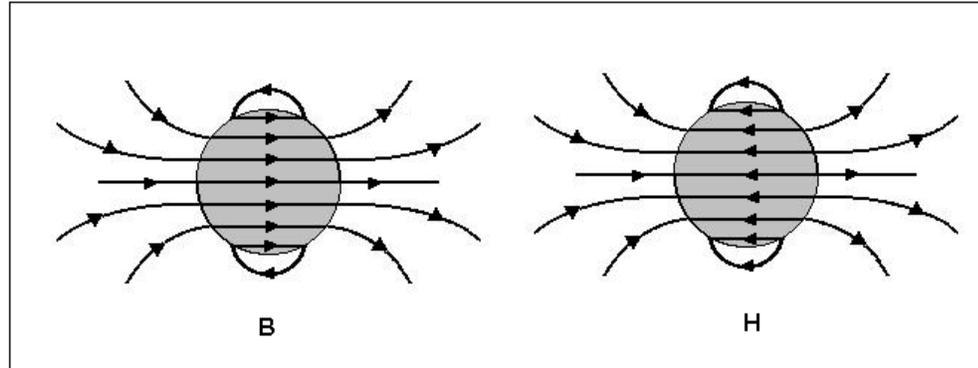


Figura 4.4: Líneas de campo de \mathbf{B} y \mathbf{H} para una esfera magnetizada uniformemente; las líneas de \mathbf{B} se cierran sobre si mismas, pero las de \mathbf{H} nacen y mueren en la superficie de la esfera donde se halla la “carga” magnética $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

4.6. Potencial Vectorial Magnético

Volviendo al caso más general para el cual $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$, aquí se debe utilizar la ecuación 4.1, como se observa fácilmente no se puede introducir un potencial escalar. Sin embargo podemos en su lugar usar un potencial vectorial \mathbf{A} ; esto se puede hacer basándose en el hecho que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ y que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces se puede escribir que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.42)$$

Ahora se tiene que ver como encontrar \mathbf{A} , se debe suponer que se está tratando con situaciones en las cuales μ es independiente de la posición. Entonces de las ecuaciones 4.1 y 4.2 se tiene

$$\mu \nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (4.43)$$

Se puede demostrar que una función vectorial está completamente determinada si su rotacional y divergencia con conocidos en todos los puntos del espacio. Ya se tiene definido el $\nabla \times \mathbf{A}$ que da \mathbf{B} , por lo tanto se está libre de escoger $\nabla \cdot \mathbf{A}$ de cualquier manera arbitraria y conveniente, puesto que no afectará la solución física como se describe en la ecuación 4.42. Esto es aproximadamente análogo al hecho que un potencial escalar pueda tener una constante escalar aditiva. Si se regresa ahora a la ecuación 4.43 se ve que una

buena escogencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.44)$$

convirtiendose la ecuación 4.43 en

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (4.45)$$

como las componentes $\nabla^2 A_x = -\mu J_x$ etc, satisfacen la ecuación de Poisson, pudiendose utilizar su solución ya estudiada anteriormente.

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{T.E} \frac{J_x dv}{r} \quad (4.46)$$

así que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{T.E} \frac{\mathbf{J} dv}{r} \quad (4.47)$$

Este resultado muestra, que si son dados la distribución de las corrientes en todas partes se puede encontrar a \mathbf{A} y a partir de él el valor de \mathbf{B} en todas partes.

Como en el caso electrostático, se pueden presentar situaciones en que conocemos a \mathbf{J} sólo en una región limitada del espacio y desconocemos la distribución de las corrientes fuera de esa región. Se procede entonces de una manera similar como se trató en elctrostática, es decir, cambiar la solución general de la ecaución de Laplace con solución especial de la ecuación 4.45, satisfaciendo la solución la condición 4.4.

En esta etapa, es de interés ver que la solución que se obtuvo para \mathbf{A} en la ecuación 4.47 es realmente equivalente a la ley de Ampère, vista con anteriridad. Por simplicidad, daremos por sentado que para un medio no magnético donde $\mu = \mu_0$ la ecuación 4.47 llega a ser

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} dv}{r} \quad (4.48)$$

Discutiremos la situación simple mostrada en la figura 4.5. Como un primer paso se tranformará el intergrado de la expresión 4.48, para tal fin la sección transversal de la región ocupada por la corriente I se debe llamar S y considerando el pequeño elemento de longitud dl , entonces $I = JS$ y si multiplicamos por dl obtenemos $I dl = J(S dl) = J dv$, donde dv es el volumen

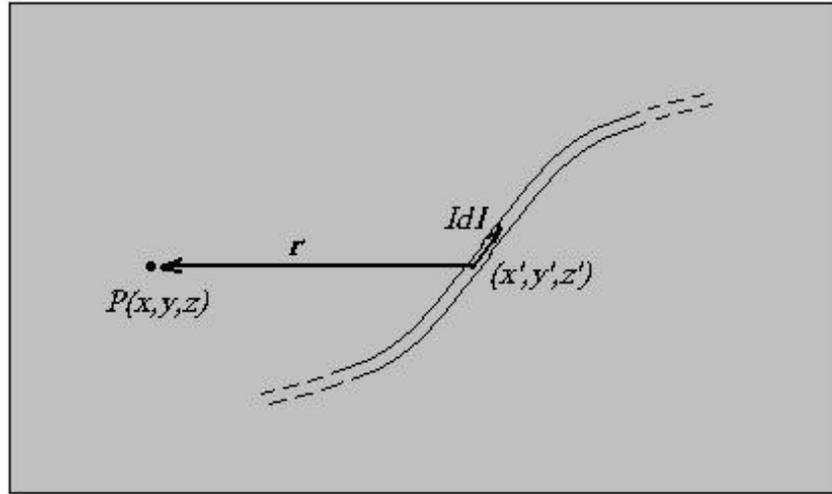


Figura 4.5: Elemento de corriente $I d\mathbf{l}$, de un circuito filamentario.

de la pequeña porción de cargas que conforman la corriente; puesto que \mathbf{J} y $d\mathbf{l}$ son paralelos, se puede escribir

$$\mathbf{J} dv = I d\mathbf{l} \quad (4.49)$$

reemplazando en la expresión 4.48

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (4.50)$$

y por lo tanto de la expresión 4.42 se tiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (4.51)$$

Dado que la operación rotacional envuelve derivadas con respecto a las coordenadas (x, y, z) del punto P , en la figura 4.5, en el cual se quiere encontrar a \mathbf{B} , y puesto que la integración está sobre las coordenadas (x', y', z') del elemento de corriente $I d\mathbf{l}$, se puede intercambiar las operaciones en la ecuación 4.51; esto da

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}}{r} \right) \quad (4.52)$$

pero

$$\nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}}{r} \right) = \frac{\nabla \times d\mathbf{l}}{r} + \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{l} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{l} \quad (4.53)$$

puesto que $\nabla \times d\mathbf{l} = 0$, por ser $d\mathbf{l}$ independiente de (x, y, z) . También

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\nabla r}{r^2} \quad (4.54)$$

y $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x'}{r}$, etc, porque $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$; por consiguiente

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.55)$$

si se combina las expresiones 4.53 y 4.54. introduciendo 4.52 se encuentra que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \times d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

lo cual es exactamente lo que se obtuvo originalmente de la Ley de Ampère, expresión conocida como ley de Biot-Savart.

4.7. Inductancia y Energía Magnética

El objetivo principal es obtener una expresión para la energía en un campo magnético estático; en este caso es mucha más difícil de encontrar que para el caso electrostático, de tal manera que se tratará de simplificar los resultados. Si se aplica la ley de Faraday para el siguiente caso: una corriente I_1 en un circuito C_1 que produce una inducción magnética \mathbf{B}_1 , en todos los puntos del espacio, en particular en el circuito C_2 ; al cambiar la corriente I_1 , también cambia \mathbf{B}_1 y por lo tanto hay una fem inducida en el circuito C_2 . De tal manera que se escribe que

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \oint_{C_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_2} \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

entonces

$$\varepsilon_2 = - \left[\frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \right] \frac{\partial I_1}{\partial t} \quad (4.56)$$

donde se ha hecho uso de la expresión 4.50 y que el espacio es de permeabilidad μ . ahora podemos escribir

$$\varepsilon_2 = \oint_{C_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} \quad (4.57)$$

donde

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \quad (4.58)$$

L_{12} es llamada la *inductancia mutua* entre los circuitos C_1 y C_2 . Es un factor puramente geometrico y puede ser calculado por las configuraciones de los circuitos por medio de la ecuación 4.58.

Cuando los subindices 1 y 2 se permutan en la ecuación 4.58 el resultado es el mismo, de tal manera el factor de proporcionalidad si se va a calcular la fem inducida en C_1 debido a una corriente variable en C_2 , es

$$L_{21} = L_{12} \quad (4.59)$$

aún cuando se tenga un solo circuito, la inducción producida por la corriente se presentará en el mismo circuito, luego un cambio en la corriente induce una fem (fem autoinducida) en este, así que se puede escribir

$$\varepsilon_1 = -L_{11} \frac{\partial I_1}{\partial t} \quad (4.60)$$

L_{11} es la llamada autoinductancia y de 4.58 es dada por

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} \quad (4.61)$$

excepto que ahora la ecuación 4.61 envuelve una doble integración sobre el mismo circuito.

Como puede verse en las integrales 4.58 y 4.61 el proceso de calcularlas son algunas veces difíciles y entonces es conveniente usar otra relación que de la inductancia. combinando la ley de Faraday y la expresión 4.57 obtenemos:

$$\frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial t} = L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} \quad (4.62)$$

Si integramos 4.62 y usamos la condición que $\Phi_{m2} = 0$ cuando $I_1 = 0$, obtenemos $\Phi_{m2} = L_{12}I_1$ o que

$$L_{12} = \frac{\Phi_{m2}}{I_1} \quad (4.63)$$

este resultado muestra que la inductancia mutua es igual al flujo intersectado por el circuito C_2 por la corriente unidad en el circuito C_1 , y es fácil de usar este mismo tipo de relación, válido por supuesto, para la autoinductancia, que es:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{m1}}{I_1} \quad (4.64)$$

se quiere ahora ilustrar el uso de 4.64 en el siguiente ejemplo.

4.7.1. Ejemplo 4

Autoinductancia de una bobina toroidal.

Puesto que la inducción magnética dentro del toro es: $B = \frac{\mu NI}{2\pi R}$; si el diámetro de la sección transversal es pequeño comparado con el radio del toro, B es aproximadamente constante sobre la sección transversal, por lo tanto el flujo total a través de todas las vueltas es: $\Phi_m = NBS = \frac{\mu SN^2 I}{2\pi R}$; donde S es el área de la sección transversal. De la expresión 4.64 se tiene que $L_{11} = \frac{\Phi_m}{I}$, entonces

$$L_{11} = \frac{\mu SN^2}{2\pi R} \quad (4.65)$$

4.8. Energía Magnetostática.

Se usará el término energía magnetostática para referirse a la energía de una distribución de corrientes libres. Se encontrará el trabajo que debe realizarse para establecer una corriente final I_f en una autoinductancia L . Cuando la corriente tiene el valor I , la fem autoinducida es $L\frac{dI}{dt}$. Por definición la fem es el trabajo por unidad de carga, cuando aumentamos la carga en $I dt$, la energía magnética varía en

$$dU_m = L\frac{dI}{dt}I dt = LI dI \quad (4.66)$$

por lo tanto la energía total necesaria para llegar a la corriente final I_f es

$$U_m = \int_0^{I_f} LI dI = \frac{1}{2} LI_f^2 \quad (4.67)$$

Es conveniente escribir el resultado en otra forma, al remplazar 4.61 en 4.67 se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} = \frac{1}{2} \oint_C I d\mathbf{l} \cdot \left[\frac{\mu}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{r} \right]$$

haciendo uso de 4.49 y 4.50 se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \quad (4.68)$$

Se puede transformar este resultado de modo que la energía sea expresada en términos de los campos. Tomando la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

donde se ha utilizado la ecuaciones 4.1 y 4.42, por lo que la expresión 4.68 puede ser escrita como

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv + \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv + \int_{\substack{\text{cerrada} \\ S \rightarrow \infty}} (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \end{aligned} \quad (4.69)$$

La última integral debe anularse por la mismos argumentos que se dieron en el caso electrostático, quedando entonces

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{T.E} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (4.70)$$

Se puede hablar también de una densidad de energía magnetostática como

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (4.71)$$

4.9. Problemas

1. La región entre las placas de un condensador plano-paralelo es llenado con un medio de conductividad g . si la diferencia de potencial es mantenida constante, encuentre la corriente total entre las placas. Muestre también que la resistencia está relacionada con el valor de la capacitancia en el vacío C_0 por: $R = \frac{\epsilon_0}{gC_0}$.
2. Con la ayuda de la ecuación de continuidad y la ley de Ohm (ecuación 4.11), demuestre que la ecuación que describe la densidad de carga en un conductor es $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{g\rho}{\epsilon}$. Encuentre el tiempo requerido por una densidad de carga preexistente dentro de un conductor para disminuir a $\frac{1}{e}$ de su valor inicial. ¿Qué le pasa a la carga?
3. Un alambre infinitamente recto y largo de radio a lleva una corriente I distribuida uniformemente sobre su sección transversal. Demuestre que, las direcciones de \mathbf{H} forman círculos concéntricos con el eje del alambre. Demuestre que la magnitud de \mathbf{H} fuera del alambre y a una distancia r de su eje es: $\frac{I}{2\pi r}$. También, encuentre \mathbf{H} dentro del alambre.
4. Un cilindro infinitamente largo, tiene permeabilidad μ , está colocado en un campo magnético externo inicialmente uniforme y perpendicular al eje del cilindro. Encuentre \mathbf{B} y \mathbf{H} fuera y dentro del cilindro. Encuentre \mathbf{M} y luego demuestre que el factor de desmagnetizante es $\frac{1}{2}$.
5. Se dá una bobina toroidal de doble devanado N_1 y N_2 , radio medio R y área transversal S . Demuestre que la inductancia mutúa en los dos devanados es

$$L_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi R}$$

6. Encuentre la energía magnética producida por un solenoide toroidal que lleva una corriente constante I , y de ese modo verificar directamente que esta es igual a $\frac{1}{2}LI^2$.
7. Demuestre que el trabajo requerido para establecer una corriente I , en un circuito C_1 y una corriente I_2 en un circuito C_2 es:

$$U_m = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2$$

8. Si se aplica la fórmula $u_m = \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ al interior de una esfera uniformemente magnetizada, se encuentra u_m es negativo porque \mathbf{B} y \mathbf{H} son opuestos. ¿Cuál es la solución a esta dificultad aparente?

9. Una bobina toroidal de N vueltas, se enrolla sobre una forma no magnética. Si el radio medio de la bobina es b y el radio de la sección de la forma es a . Demuestre que la autoinductancia de la bobina está dada por:

$$L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

10. Se dá una cascara esférica, radio interno R_1 , y radio externo R_2 , que se magnetiza uniformemente en la dirección del eje Z . La magnetización en la cascara es $\mathbf{M}_0 = M_0 \hat{\mathbf{u}}_z$. Hallese el potencial escalar Φ_m para puntos sobre el eje Z , tanto dentro como fuera de la cascara.

11. Demuéstrese que el potencial vectorial magnético para dos alambres largos rectos paralelos, que conducen una corriente de la misma intensidad I , en sentidos opuestos está dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \hat{\mathbf{n}}$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde el punto del campo a los alambres, y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario paralelo a los alambres.

12. Si $\mathbf{J} = kR^2 \hat{\mathbf{u}}_z$, en coordenadas cilíndricas (a) Halle \mathbf{H} por medio de la ley de Ampère. (b) Demuestre que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

13. Se evidencia por la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ que sólo cierta clase de campos vectoriales llenan el requisito de un campo de inducción magnética físicamente realizable. Verifíquese que:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{r}{r} \right) \times \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ es una solución de la ecuación de Laplace, es un campo magnético adecuado, y hállese la densidad de corriente \mathbf{J} que lo produce.

14. Se da el siguiente conjunto de conductores: un alambre recto infinitamente largo rodeado por una envoltura cilíndrica delgada de metal (a un radio b) dispuesta coaxialmente con el alambre. Los dos conductores conducen corrientes de igual intensidad I , pero de sentidos contrarios. Hállese el potencial vectorial magnético del sistema.

15. Un circuito está formado por dos cáscaras cilíndricas coaxiales de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) y de longitud común L , conectados por placas de extremos planos. La carga fluye hacia una cascara y regresa a la otra. ¿Cuál es la autoinductancia de este circuito?

4.10. Problemas Varios Capítulo 4

1. Dos espiras circulares pequeñas de alambre (de radios a y b), están en el mismo plano a una distancia r una de la otra. ¿Cuál es la inductancia mutua entre las espiras si la distancia r es suficientemente grande de modo que pueda utilizarse la aproximación del dipolo magnético?
2. Dos espiras circulares de corriente con ejes paralelos están a una distancia r una de la otra, que es suficientemente grande como para que se pueda utilizar la aproximación dipolar. Demuéstrese cómo deberá colocarse una de las espiras relativa a la otra de modo que la inductancia mutua sea cero.
3. Se dan dos circuitos, un alambre recto muy largo y un rectángulo de dimensiones h y d . El rectángulo está en un plano que pasa por el alambre; los lados de longitud h son paralelos al alambre y están a una distancia r y $r + d$ de él. Calcúlese la inductancia mutua entre los dos circuitos.
4. Demuéstrese que la fem en un circuito fijo C está dada por

$$-\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

donde \mathbf{A} es el potencial vectorial magnético.

5. Similarmente que para el caso electrostático se puede definir:

i) Densidad del polo magnético $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$

ii) Densidad superficial de la intensidad del polo magnético $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

iii) Densidad de corriente de magnetización superficial (esto es, una corriente de magnetización por unidad de longitud que fluye en una capa superficial)

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

Para una esfera de material magnético de radio R colocada en el origen de coordenadas, cuya magnetización es $\mathbf{M} = (ax^2 + b)\hat{\mathbf{u}}_x$; a y b constantes. Determinese cada una de las cantidades definidas inicialmente.

Capítulo 5

Ondas Electromagnéticas

5.1. Introducción

En este capítulo se tratará fundamentalmente de resolver las ecuaciones de Maxwell (en casos particulares) y observar que los campos eléctricos y magnético, así como los potenciales, satisfacen la ecuación de onda en sus diferentes formas. Se estudiará las ondas electromagnéticas planas en medios dieléctricos y conductores.

5.2. Ecuación de Onda

Se hará el estudio para medios (l, i, h) en los que se cumple: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$, donde ϵ, μ, g son constantes y además el espacio es libre de cargas, $\rho = 0$.

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell estudiadas en Capítulo 1, la ley de Ampère Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ se transforma en

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu g \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.1)$$

La ley de Faraday queda igual

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

La ley de Gauss en el caso eléctrico $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.3)$$

La ley de Gauss para el caso magnético quedaría igual

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.4)$$

Calculando el rotacional a la ecuación 5.1 se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu g \nabla \times \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

reemplazando la ecuación 5.2 y utilizando la identidad para el rotacional del rotacional (apéndice A) se puede escribir

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

al reemplazar la ecuación 5.4 se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.5)$$

Partiendo de la ecuación 5.2 y procediendo en forma similar se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

Para medios dieléctrico con conductividad $g = 0$ las expresiones 5.5 y 5.6 se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7)$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.8)$$

Las ecuaciones 5.7 y 5.8 son de la forma de la ecuación de onda

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (5.9)$$

y las ecuaciones 5.5 y 5.6 tienen la forma de la ecuación de onda amortiguada. De ahí se desprende que la velocidad de propagación de la onda electromagnética es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (5.10)$$

para el espacio libre es la velocidad de la luz en el vacío $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Además se puede escribir la ecuación 5.10 de la forma $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_e \epsilon_0 \kappa_m \mu_0}}$ o sea

$$v = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m \kappa_e}} \quad (5.11)$$

donde κ_m es la permeabilidad magnética relativa y κ_e es la permitividad eléctrica relativa o constante dieléctrica.

5.3. Ondas E.M. Planas en un Diléctrico (l, i, h)

Para este caso las ecuaciones 5.7 y 5.8 son las adecuadas para este caso. De tal manera que la solución para el campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_1(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{f}_2(vt + \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.12)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda y $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}_x x + \hat{\mathbf{u}}_y y + \hat{\mathbf{u}}_z z$ es el vector posición; \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 son funciones arbitrarias de $(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ y $(vt + \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ respectivamente. si se toma el caso que la onda se propaga en la dirección $+\hat{\mathbf{n}}$; las soluciones para los campos pueden escribirse como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 f(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.13)$$

y

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.14)$$

para el caso de ondas transversales, donde \mathbf{B}_0 y \mathbf{E}_0 son las amplitudes de \mathbf{B} y \mathbf{E} respectivamente y f es una función escalar arbitraria de $(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})$.

Partiendo de la ecuación de Maxwell 5.2 se tiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{ox} f & E_{oy} f & E_{oz} f \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

Al evaluar la ecuación 5.15 queda

$$\nabla \times \mathbf{E} = -(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0) f'(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.16)$$

Ahora calculando el segundo miembro de 5.2

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B}_0 \frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{B}_0 v f'(vt - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.17)$$

de tal manera que al igualar las ecuaciones 5.16 y 5.17 se llega a $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 = v\mathbf{B}_0$ por lo tanto

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B} \quad (5.18)$$

pudiendo concluir que

$$\mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{n}} \text{ y } \mathbf{B} \perp \mathbf{E} \quad (5.19)$$

tomando ahora la ecuación de Maxwell 5.3

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

o sea

$$-(E_{0x}n_x f' + E_{0y}n_y f' + E_{0z}n_z f') = 0$$

de tal manera que

$$(E_{0x}n_x + E_{0y}n_y + E_{0z}n_z) = 0 \implies \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.20)$$

lo que implica que

$$\mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}} \quad (5.21)$$

Al combinar las ecuaciones 5.18, 5.19, 5.20 y 5.21 se concluye que

$$|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}| = |v\mathbf{B}| \implies |\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}|$$

y los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} y $\hat{\mathbf{n}}$ forman una base ortogonal.

5.3.1. Solución de la Ecuación de Onda

La ecuación de onda a solucionar en forma detallada es de la forma

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.22)$$

Utilizando el método de separación de variables se escribe

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) T(t) \quad (5.23)$$

reemplazando en la ecuación 5.22, queda

$$T(t) \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{v^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

entonces

$$\frac{v^2}{\psi} \nabla^2 \psi = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (5.24)$$

o sea

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (5.25)$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (5.26)$$

La ecuación 5.25 tiene como solución:

$$T(t) = a(\omega) \exp(i\omega t); \quad \omega \neq 0; \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (5.27)$$

donde $a(\omega)$ es una función arbitraria de ω .

La solución 5.27 representa una perturbación que varía sinusoidalmente en el tiempo con una frecuencia angular ω . Por conveniencia se puede tomar $\omega > 0$ y la solución toma la forma

$$T(t) = a(\omega) \exp(i\omega t) + a'(\omega) \exp(-i\omega t); \quad 0 < \omega < +\infty \quad (5.28)$$

La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia ν por $\omega = 2\pi\nu$. Introduciendo el número de onda k como $k = \frac{\omega}{v} = 2\pi\frac{\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$; donde $\lambda = \frac{v}{\nu}$ es la longitud de onda de la onda de frecuencia ν y velocidad v .

Se procederá ahora a resolver la parte independiente del tiempo (5.26) utilizando nuevamente el método de separación de variables:

$$\psi(x, y, z) = \xi(x) \eta(y) \phi(z) \quad (5.29)$$

al remplazar en la ecuación 5.26 se obtiene

$$\eta\phi \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \xi\phi \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \xi\eta \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k^2 \xi\eta\phi = 0$$

entonces

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k^2 = 0$$

entonces

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -k_1^2 \implies \frac{d^2 \xi}{dx^2} + k_1^2 \xi = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{dy^2} = -k_2^2 \implies \frac{d^2 \eta}{dy^2} + k_2^2 \eta = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -k_3^2 \implies \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k_3^2 \phi = 0 \quad (5.32)$$

donde

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (5.33)$$

Cada una de estas ecuaciones diferenciales tiene como solución:

$$\xi(x) = b_1(k_1) \exp(ik_1x); \quad -\infty < k_1 < +\infty \quad (5.34)$$

$$\eta(y) = b_2(k_2) \exp(ik_2y); \quad -\infty < k_2 < +\infty \quad (5.35)$$

$$\phi(z) = b_3(k_3) \exp(ik_3z); \quad -\infty < k_3 < +\infty \quad (5.36)$$

donde las funciones $b_i(k_i)$; $i = 1, 2, 3$; son funciones arbitrarias de k_i .

La solución de la parte independiente del tiempo de la ecuación de onda se puede escribir como

$$\psi(x, y, z) = b_1(k_1) b_2(k_2) b_3(k_3) \exp i(k_1x + k_2y + k_3z)$$

o también

$$\psi(x, y, z) = b(k_1, k_2, k_3) \exp i(k_1x + k_2y + k_3z)$$

donde

$$b(k_1, k_2, k_3) = b_1(k_1) b_2(k_2) b_3(k_3)$$

Es conveniente definir el vector de onda \mathbf{k} en la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$ cuyas componentes son (k_1, k_2, k_3) , por consiguiente

$$\psi(\mathbf{r}) = b(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.37)$$

donde $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}_x x + \hat{\mathbf{u}}_y y + \hat{\mathbf{u}}_z z$ y $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{\mathbf{n}}$.

Llevando 5.28 y 5.37 a 5.23 se obtiene la solución de la ecuación de onda:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = a(\omega) b(\mathbf{k}) \exp[i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + a'(\omega) b(\mathbf{k}) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

una forma adecuada será

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + h(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (5.38)$$

donde $g(\mathbf{k}, \omega) = a(\omega) b(\mathbf{k})$ y $h(\mathbf{k}, \omega) = a'(\omega) b(\mathbf{k})$.

La solución general se obtiene integrando sobre los valores permisibles de ω, k_1, k_2 y k_3

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\omega g(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\omega h(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (5.39)$$

donde $dk = dk_1 dk_2 dk_3$

Si $\Psi(\mathbf{r}, t)$ representa las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , como físicamente son admisibles la parte real, se puede escribir teniendo en cuenta la ecuación 5.38

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{Re } \mathbf{B}_2(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (5.40)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{Re } \mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (5.41)$$

Aquí se toma el primer sumando el conjugado complejo de la ecuación 5.38. Se obtiene una solución general para \mathbf{E} y \mathbf{B} evaluando las integrales sobre ω, k_1, k_2 y k_3 .

Los primeros términos de 5.40 y 5.41 representa una onda plana transversal de frecuencia angular ω , en la dirección $+\mathbf{k}$ y el segundo representa una onda plana transversal de frecuencia angular ω , en la dirección $-\mathbf{k}$.

Cuando se desea obtener soluciones para ondas planas, las cuales están definidas como aquellas cuya amplitud es la misma en cualquier punto de un plano perpendicular a una dirección específica; monocromáticas, o sea ondas que están caracterizadas por tener una sola frecuencia; se escribe:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 \text{ y } \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{B}_2(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{B}_0$$

donde

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{\mathbf{n}}$$

En resumen se puede expresar los campos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re } \mathbf{E}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v} \right) \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re } \mathbf{B}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{en la dirección } +\hat{\mathbf{n}} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re } \mathbf{E}_0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v} \right) \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re } \mathbf{B}_0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{en la dirección } -\hat{\mathbf{n}} \quad (5.43)$$

5.4. Ondas E.M. Planas en un Conductor (l, i, h)

Las ecuaciones para este caso son la 5.5 y 5.6; si restringimos el caso a ondas transversales en la dirección $+\hat{\mathbf{n}}$ y observando la ecuación 5.42, solución para dieléctricos, se puede escribir la solución de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (5.44)$$

reemplazando el ecuación 5.6 se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + i\mu\sigma\omega \mathbf{G}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) = 0$$

o sea

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + i\mu g \omega \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0 \implies \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} + i\frac{\mu g}{\omega} \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0$$

o también

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.45)$$

donde

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{v^2} + i\frac{\mu g}{\omega} \right)^{-1}$$

o sea

$$\alpha^2 = \left(\mu\epsilon + i\frac{\mu g}{\omega} \right)^{-1} \quad (5.46)$$

teniendo en cuenta la solución obtenida para medios dieléctricos se escribe:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp \left[i \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right]$$

Al remplazar en 5.44 se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\alpha} \right) \right] \quad (5.47)$$

Análogamente para el campo magnético \mathbf{B} se obtiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\alpha} \right) \right] \quad (5.48)$$

Comparando las ecuaciones 5.47 y 5.48 con la ecuación 5.42 se observa que la velocidad de fase en un conductor es α , un complejo. El significado físico de esta velocidad de fase compleja se verá a continuación.

Como α es complejo se puede escribir:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{v_c} + ik; \text{ donde } v_c, k \in R_e$$

entonces

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{v_c^2} + i\frac{2k}{v_c} - k^2 = \mu\epsilon + i\frac{\mu g}{\omega}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación 5.46. Por lo tanto

$$\frac{1}{v_c^2} - k^2 = \mu\epsilon \text{ y } \frac{2k}{v_c} = \frac{\mu g}{\omega}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se llega a:

$$v_c = \frac{\omega}{g} \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu}} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.49)$$

y

$$k = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.50)$$

Al remplazar el valor de $\frac{1}{\alpha}$ en las ecuaciones 5.47 y 5.48 se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-k\omega \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v_c} \right) \right] \quad (5.51)$$

y para \mathbf{B}

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \exp(-k\omega \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v_c} \right) \right] \quad (5.52)$$

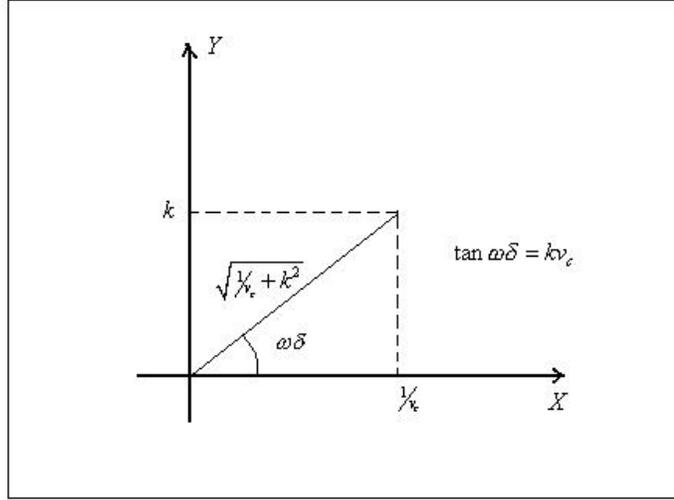


Figura 5.1: Representación de $\frac{1}{\alpha}$ en un plano complejo

Al observar las ecuaciones 5.51 y 5.52 se ve que las amplitudes decrecen exponencialmente proporcionalmente a k , denominado coeficiente de absorción o extinción del medio. Además aparece la parte $\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{v_c}\right)\right]$ que es análoga a la que aparece en el caso de los medios dieléctricos $\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{v}\right)\right]$; pero para el caso de los conductores v_c no es constante si no que depende de la frecuencia de la onda.

Ahora teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell y por analogía con el caso de los dieléctricos se escribe:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \alpha \mathbf{B} \implies |\mathbf{E}| = \alpha |\mathbf{B}|$$

por lo que se puede escribir la ecuación 5.52 en la forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} E_0 \hat{\mathbf{u}}_B \exp(k\omega \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{v_c}\right)\right] \quad (5.53)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_B$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{B} . Por otro lado como $\frac{1}{\alpha}$ es un número complejo se puede representar como se señala en la figura 5.1. O sea:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{v_c} + ik = \sqrt{\frac{1}{v_c^2} + k^2} (\cos \omega\delta + i \sin \omega\delta) = \sqrt{\frac{1}{v_c^2} + k^2} \exp(i\omega\delta)$$

Remplazando en 5.53 queda

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{v_c^2} + k^2} E_0 \hat{\mathbf{u}}_B \exp[-\omega k (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})] \exp\left[-i\omega \left(t - \delta - \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{v_c}\right)\right] \quad (5.54)$$

Al comparar las ecuaciones 5.51 y 5.54 se observa que entre \mathbf{E} y \mathbf{B} hay una diferencia de fase; en cambio en los dieléctricos están en fase.

Ahora se puede concluir que la velocidad de fase compleja indica que:

1. Absorción en el medio

2. Una diferencia de fase entre los vectores eléctrico y magnético.

Se define la distancia d (penetración de Skin) como la distancia que una onda electromagnética al entrar en un conductor disminuye en $\frac{1}{e}$ de su valor inicial.

De 5.50 se tiene que:

$$d = \frac{1}{\omega k} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

El valor de la permitividad eléctrica en los conductores no es tan grande como en los dieléctricos, de tal manera que para algunos metales se cumple que:

$$\frac{g}{\omega\epsilon} \gg 1 \implies d \approx \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left(\frac{g}{\omega\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{g}}$$

quedando entonces

$$d \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu g}} \quad (5.55)$$

5.5. Potenciales Retardados

Cuando se presentó el concepto de potencial vectorial magnético \mathbf{A} , debido a que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se obtuvo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.56)$$

Si se sustituye la ecuación 5.56 en la forma diferencial de la ley de Faraday se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (5.57)$$

o sea

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.58)$$

Puesto que la suma de las dos cantidades vectoriales entre paréntesis en la ecuación 5.58 es irrotacional, puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para ser consistente con la definición de potencial eléctrico escalar Φ en electrostática, se escribe

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

de lo cual se obtiene

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.59)$$

En el caso estático, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ y la ecuación 5.59 se reduce a $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Por consiguiente, se puede determinar \mathbf{E} usando solamente Φ , y \mathbf{B} a partir de \mathbf{A} usando la ecuación 5.56. Para campos variables en el tiempo \mathbf{E} depende tanto de Φ como de \mathbf{A} ; es decir, la intensidad del campo eléctrico puede ser resultado de las acumulaciones de carga a través del término $-\nabla\Phi$ y de campos magnéticos variables con el tiempo por medio del término $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Puesto que \mathbf{B} también depende de \mathbf{A} , \mathbf{E} y \mathbf{B} están acoplados.

Sustituyendo las ecuaciones 5.56 y 5.59 en la expresión de la ley de Ampère-Maxwell (ecuación 1.65) y usando las relaciones $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$ y $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. Se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (5.60)$$

donde se ha supuesto un medio homogéneo. Recordando la identidad vectorial para $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$, se puede escribir la ecuación 5.60 como:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \nabla \left(\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

o

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (5.61)$$

La definición de un campo vectorial requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Aunque el rotacional de \mathbf{A} se designó como \mathbf{B} en la ecuación 5.56, se tiene la libertad de elegir la divergencia de \mathbf{A} . Sea

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.62)$$

que hace nulo el segundo término del lado derecho de la ecuación 5.61 y ésta se reduce a la forma más simple. Se tiene entonces

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (5.63)$$

La ecuación 5.63 es la *ecuación de onda no homogénea para el potencial vectorial* \mathbf{A} . Se denomina ecuación de onda porque sus soluciones representan ondas que se propagan con velocidad igual a $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Esto se verá mejor más adelante donde se analiza la solución de la ecuación de onda. La relación entre \mathbf{A} y Φ en la ecuación 5.62 se conoce como *condición de Lorentz (o gauge de Lorentz) de los potenciales*. En el caso de campos estáticos se reduce a la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

La ecuación de onda correspondiente al potencial escalar Φ es

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.64)$$

que es la *ecuación no homogénea para el potencial escalar* Φ . De esta manera la condición de Lorentz en la ecuación 5.62 separa las ecuaciones de onda de \mathbf{A} y Φ . Observe la similitud entre las ecuaciones 5.63 y 5.64 y la analogía entre las cantidades: $\mathbf{A} \sim \Phi$, $\mathbf{J} \sim \rho$ y $\mu \sim \frac{1}{\epsilon}$.

5.5.1. Solución de Ecuaciones de Onda

Considerando ahora la solución de la ecuación de onda no homogénea 5.64 para un potencial escalar Φ debido a una distribución de carga ρ en una región finita. Situando una carga puntual elemental $\rho dv'$ en el origen en el instante t . A una distancia r lejos del origen se puede suponer una simetría esférica (es decir, Φ depende únicamente de r y t , no de θ ni de ϕ). Pudiéndose escribir la ecuación 5.64 como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.65)$$

Se introduce ahora una nueva función

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} U(r, t) \quad (5.66)$$

que simplifica la ecuación 5.65 a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (5.67)$$

La ecuación 5.67 es una ecuación de onda unidimensional homogénea. Puede comprobarse por sustitución directa que cualquier función de $(t - r\sqrt{\mu\epsilon})$ que sea diferenciable dos veces será una solución de la ecuación 5.67. Se escribe

$$U(r, t) = f(t - r\sqrt{\mu\epsilon}) \quad (5.68)$$

La función a la nueva distancia $r + \Delta r$ en un instante posterior $t + \Delta t$ es

$$U(r + \Delta r, t + \Delta t) = f[t + \Delta t - (r + \Delta r)\sqrt{\mu\epsilon}]$$

que es igual a $f(t - r\sqrt{\mu\epsilon})$ y conserva su forma si $\Delta t = \Delta r\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\Delta r}{v}$: la cantidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.69)$$

es la *velocidad de propagación de la onda*, una característica del medio. A partir de las ecuaciones 5.66 y 5.68 se tiene

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad (5.70)$$

Para determinar cuál debe ser la función $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$ específica, hay que observar la expresión para una carga puntual estática $\rho(t) \Delta V'$ en el origen,

$$\Delta\Phi(r) = \frac{\rho(t) \Delta V'}{4\pi\epsilon r} \quad (5.71)$$

Al comparar con la ecuación 5.70 y 5.71 se puede identificar

$$\Delta f\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) \Delta V'}{4\pi\epsilon} \quad (5.72)$$

El potencial debido a una distribución de carga en un volumen V' es, haciendo $\Delta V' \rightarrow dv'$, entonces

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dv' \quad (5.73)$$

La ecuación 5.73 indica que el potencial escalar a una distancia r de la fuente en un instante t depende del valor de la carga en un instante anterior $\left(t - \frac{r}{v}\right)$. Por esta razón, $\Phi(r, t)$ en la ecuación 5.73 se denomina *potencial escalar retardado*.

La solución de la ecuación de onda no homogénea (ecuación 5.63) para el potencial vectorial magnético \mathbf{A} puede realizarse exactamente de la misma manera que hicimos con Φ . La ecuación vectorial 5.63 de \mathbf{A} puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, cada una de éstas similar a la ecuación 5.64 de Φ . El *potencial vectorial retardado* está expresado entonces por

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dv' \quad (5.74)$$

Los campos eléctrico y magnético derivados por diferenciación de \mathbf{A} y Φ serán evidentemente funciones de $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ y, por consiguiente, retardados en el tiempo. Se requiere tiempo para que las ondas electromagnéticas se propaguen y se sientan los efectos de las cargas y las corrientes variables en el tiempo en puntos distantes. En teoría de circuitos se ignora este efecto de retardo temporal y se supone una respuesta instantánea.

5.6. Flujo de Potencia E.M. y Vector de Poynting

Las ondas E.M. transportan energía E.M. La energía se transporta por el espacio a puntos receptores distantes a través de las ondas E.M. A continuación se deriva una relación entre la razón de transferencia de tal energía y las intensidades de campos electricos y magnéticos asociados con la onda E.M. que se propaga.

Partiendo de la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (5.75)$$

y sustituir en las ecuaciones 1.62 y 1.65 correspondiente a la ley de Faraday y la ley de Ampère - Maxwell, respectivamente, se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (5.76)$$

para un medio simple cuyos parámetros constitutivos ϵ, μ y g no cambian con el tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{H} \cdot \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right), \\ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right), \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot (g \mathbf{E}) = g E^2 \end{aligned}$$

Se puede escribir entonces la ecuación 5.76 como sigue

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - gE^2 \quad (5.77)$$

que es una relación de función puntual. Al integrar ambos lados sobre el volumen que interesa se obtiene una forma integral de la ecuación 5.77

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \iiint_V gE^2 dv \quad (5.78)$$

donde se aplicó el teorema de la divergencia para convertir la integral de volumen de $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ en la integral de superficie cerrada de $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$.

Se ve que el primero y el segundo término del lado derecho de la ecuación 5.78 representan la razón de cambio temporal de la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético, respectivamente. El último término es la potencia óhmica disipada en el volumen como resultado del flujo de la densidad de corriente de conducción $g\mathbf{E}$ en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} . Se puede entonces interpretar el lado derecho de la ecuación 5.78 como la *razón de reducción* de las energías eléctrica y magnética almacenadas, menos la potencia óhmica disipada en forma de calor en el volumen V . Esto debe ser igual a la potencia (razón de energía) que *sale* del volumen a través de su superficie, para ser consistente con la ley de la conservación de la energía. Por consiguiente, la cantidad $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ es un vector que representa el flujo de potencia por unidad de área. Definimos

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.79)$$

La cantidad \mathbf{S} se conoce como el **vector de Poynting**, y es un vector de densidad de potencia asociado con el campo electromagnético. La afirmación de que la integral de superficie de \mathbf{S} sobre una superficie cerrada, dada por el lado izquierdo de la ecuación 5.78, es igual a la potencia que sale del volumen encerrado, se conoce como **teorema de Poynting**. Esta afirmación no está limitada a ondas planas. Se puede escribir la ecuación 5.78 de otra manera:

$$-\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (u_e + u_m) dv + \iiint_V p_g dv \quad (5.80)$$

donde

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \text{densidad de energía eléctrica} \quad (5.81)$$

$$u_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \text{densidad de energía magnética} \quad (5.82)$$

$$p_g = gE^2 = \frac{J^2}{g} = \text{densidad de potencia óhmica} \quad (5.83)$$

Dicho con palabras, la ecuación 5.80 establece que la potencia total que fluye *hacia dentro* de una superficie cerrada en un instante cualquiera será igual a la suma de las razones de incremento de las energías eléctrica y magnética almacenadas y de la potencia óhmica disipada dentro del volumen limitado por la superficie.

5.7. Uso de los Campos Complejos

Es conveniente con frecuencia obtener soluciones en forma compleja para la ecuación de onda. Se debe siempre recordar, sin embargo, que se toma la parte real de una solución compleja para representar el campo en cuestión. Puesto que es inconveniente con frecuencia encontrar las partes reales, es mejor volver a escribir algunos resultados de modo que las soluciones complejas puedan ser sustituidas en ellas directamente. Se hará esto solamente para campos armónicos en el tiempo, es decir, son proporcionales a $\exp(-i\omega t)$.

Identifiquemos a \mathbf{E}_c y \mathbf{H}_c como las soluciones complejas, entonces los campos físicamente aceptables son:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)] = \text{Re}[\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)] \quad (5.84)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{H}_c(\mathbf{r}, t)] = \text{Re}[\mathbf{H}_o(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)] \quad (5.85)$$

escribiendo la parte espacial en términos de sus componentes reales e imaginarios

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) + i\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \text{ y } \mathbf{H}_o(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_r(\mathbf{r}) + i\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_r(\mathbf{r})$ y $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$ son reales, entonces 5.84 y 5.85 llegan a ser

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \cos \omega t + \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \sin \omega t \quad (5.86)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_r(\mathbf{r}) \cos \omega t + \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \sin \omega t \quad (5.87)$$

Sustituyendo 5.86 y 5.87 en el vector de Poynting (ecuación 5.79)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & [\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r})] \cos^2 \omega t + [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] \sin^2 \omega t \\ & + \{[\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r})]\} \sin \omega t \cos \omega t \end{aligned} \quad (5.88)$$

En muchas situaciones no se está interesado particularmente en los valores instantáneos del flujo de energía, porque con frecuencia fluctúan demasiado rápido para ser detectado por los instrumentos de medición. El promedio en el tiempo del flujo de potencia es generalmente más significativo.

Por lo tanto

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \{[\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})]\} \quad (5.89)$$

puesto que $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ y $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

Este resultado fundamental puede ser escrito en una forma más conveniente, puesto que:

$$\mathbf{H}_c^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_o^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) = [\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) - i\mathbf{H}_i(\mathbf{r})] \exp(i\omega t)$$

ahora se considera

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_c^*(\mathbf{r}, t) = & \{[\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})]\} \\ & + i \{[\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r})] - [\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r})]\} \end{aligned} \quad (5.90)$$

Comparando 5.89 con 5.90 se tiene

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_c^*(\mathbf{r}, t)] \quad (5.91)$$

Así se ve que en lo sucesivo el valor medio del vector de Poynting estará dado enteramente en términos de las soluciones complejas de las ecuaciones de Maxwell, de modo que se puede calcular esta importante cantidad directamente sin necesidad de encontrar primero las partes reales de las soluciones de la ecuación de onda E.M.

También, por medio de este procedimiento se puede llegar al promedio de las densidades de energía. Los resultados son:

$$\langle u_e \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \epsilon \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r}, t) \quad (5.92)$$

$$\langle u_m \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \mu H^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \mu \mathbf{H}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}_c^*(\mathbf{r}, t) \quad (5.93)$$

Ahora que se pueden obtener estos resultados importantes, ya no se necesita distinguir entre campos reales y campos complejos, y no se escribe como \mathbf{E}_c y \mathbf{H}_c sino simplemente \mathbf{E} y \mathbf{H} .

5.8. Flujo de Energía en una Onda E.M. Plana

Primero se considera el caso de $\sigma = 0$. De la ecuación 5.18 se puede escribir:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{v\mu} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\mu} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E},$$

por lo tanto de 5.91

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{n}} \quad (5.94)$$

como $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ es real, entonces usando 5.42 y 5.94

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_o|^2 \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\mathbf{H}_o|^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (5.95)$$

Se observa entonces en la ecuación 5.95 que el flujo de energía debe ocurrir en la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$, es proporcional al cuadrado de la amplitud de \mathbf{E}_o o \mathbf{H}_o . Ahora las ecuaciones 5.92 y 5.93 se convierten en

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{1}{4} \epsilon |\mathbf{E}_o|^2 = \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}_o|^2 = \langle u_m \rangle \quad (5.96)$$

Así el promedio de las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. El promedio de la densidad de energía total es

$$\langle u \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}_o|^2 = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}_o|^2 \quad (5.97)$$

lo cual facilita escribir 5.95 como

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{\mu\epsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \langle u \rangle v \hat{\mathbf{n}} = \langle u \rangle \mathbf{v} \quad (5.98)$$

o sea el promedio del flujo de energía es igual al promedio de la densidad de energía por la velocidad de propagación de la onda.

En un medio conductor en el cual $g \neq 0$, las amplitudes no son constantes y de acuerdo a 5.51 o 5.52 son proporcionales a $\exp(-k\omega\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})$. Luego de 5.95 y 5.96 se ve que ambos promedios del flujo de energía y de la densidad de energía también disminuirán exponencialmente con la distancia, esto es

$$\langle \mathbf{S} \rangle \sim \exp(-2k\omega\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}) \quad \text{y} \quad \langle u \rangle \sim \exp(-2k\omega\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}) \quad (5.99)$$

En un medio conductor, por consiguiente, la intensidad de la onda (flujo de energía) y la densidad de energía se atenúan mientras la onda se propaga. Esta energía se pierde a causa del calor resistivo del medio en virtud de *Efecto Joule*.

5.9. Problemas

1. Deducir las ecuaciones 5.92 y 5.93
2. Se da la onda electromagnética:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x E_o \cos \omega (\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + \hat{\mathbf{u}}_y E_o \sin \omega (\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$$

donde E_o es una constante. Hállese el campo magnético \mathbf{B} correspondiente y el vector de Poynting.

3. Dado un medio en que $\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}, \mu = \mu_0$, pero donde la polarización \mathbf{P} es una función dada de la posición y el tiempo $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Demuéstrese que las ecuaciones de Maxwell se obtienen correctamente a partir de una sola función vectorial \mathbf{Z} (el vector de Hertz), donde \mathbf{Z} satisface la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

y

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right)$$

4. Se da un medio en que $\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}, \epsilon = \epsilon_0$, pero donde la magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ es una función dada. Demuéstrese que las ecuaciones de Maxwell se obtienen correctamente a partir de una sola función vectorial \mathbf{Y} , en la que \mathbf{Y} satisface la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

y donde

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Y}), \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \right)$$

5. Demuestre que para una onda plana en el vacío

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \, \Omega$$

Esta resistencia se llama *impedancia del espacio libre*.

6. Encuentre el vector de Poynting sobre la superficie de un alambre conductor recto, muy largo (de radio b y conductividad g) por el que circula una corriente continua I . Verifique el teorema de Poynting.

7. El campo \mathbf{E} de una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico está dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{u}}_x 2 \cos\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right) - \hat{\mathbf{u}}_y \sin\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{V}{m}\right)$$

a. Determine la frecuencia y la longitud de onda de la onda

b. ¿Cuál es la constante dieléctrica del medio?

c. Encuentre el campo \mathbf{H} correspondiente.

8. Encontrar la relación $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle}$ para una onda plana en un medio conductor. Encontrar entonces las expresiones aproximadas para esta relación en los casos límites de un aislante de un buen conductor,

Capítulo 6

Propagación de Ondas E.M.

6.1. Introducción

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell halladas en el capítulo 5 se utilizarán ahora para resolver problemas de interés práctico, tales como problemas con valores en la frontera, en este tipo de problemas, se combinan soluciones de la ecuación de onda homogénea de tal manera que satisfagan las condiciones en la frontera adecuada.

6.2. Condiciones en la Frontera

Las condiciones en la frontera que deben satisfacerse por los campos eléctricos y magnéticos en una superficie de separación entre dos medios, se deducen de las ecuaciones de Maxwell exactamente igual como en el caso estático. La condición en la frontera más directa y universal se aplica a la inducción magnética \mathbf{B} , que satisface la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.1)$$

En una superficie de separación entre dos medios puede construirse una superficie como la mostrada en la figura 6.1.

El teorema de la divergencia puede aplicarse a la divergencia de \mathbf{B} sobre el volumen encerrado por su superficie, para obtener

$$\iint_{S, \text{ cerrada}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da_1 + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2 + \iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 da_3 = 0 \quad (6.2)$$

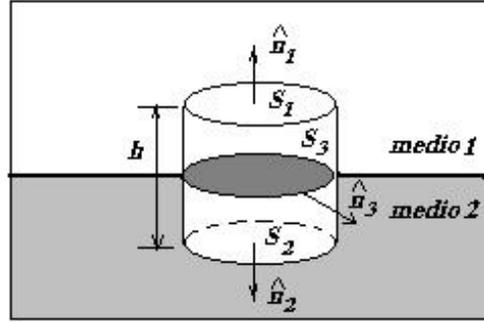


Figura 6.1: Una superficie con forma de caja cilíndrica en la zona interfacial entre dos medios puede utilizarse para obtener las condiciones de frontera sobre los vectores de campo

Si \mathbf{B} está acotado, el que h tienda a cero hace que el último término se anule y S_1 tienda a S_2 geoméricamente. Teniendo en cuenta las direcciones opuestas de $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$, se concluye rápidamente que:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (6.3)$$

exactamente como en el caso estático.

La componente tangencial del campo eléctrico puede considerarse de una manera igualmente simple. La ecuación es nuevamente una de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (6.4)$$

La integración de esta ecuación sobre la superficie limitada por circuito rectangular como en la figura 6.2, da

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = - \iint_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (6.5)$$

y aplicando el teorema de Stokes al primer miembro se tiene que:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1E_{1n} + h_2E_{2n} - h_1E'_{1n} - h_2E'_{2n} = - \iint_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (6.6)$$

Si el circuito se encoge ahora dejando que h_1 y h_2 tiendan a cero, los últimos cuatro términos del primer miembro se anulan; así como el segundo miembro,

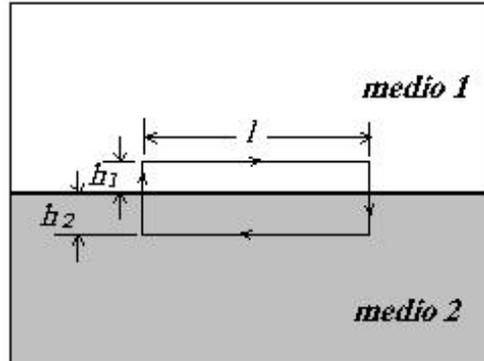


Figura 6.2: La trayectoria rectangular indicada sobre la zona interfacial entre dos medios puede utilizarse para obtener las condiciones en la frontera sobre los vectores de campo.

siempre que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ esté acotada. La ecuación resultante contiene l como factor común; suprimiéndolo se tiene

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (6.7)$$

Por lo tanto, la componente tangencial de \mathbf{E} debe ser continua al atravesar la superficie de separación.

La condición en la frontera de la componente normal del desplazamiento eléctrico es más compleja; sin embargo, también se deduce de una de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación adecuada en este caso es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6.8)$$

Si se construye un volumen como el de la figura 6.1 y se integra sobre este volumen, se obtiene

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \iiint_V \rho dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia y dejando que h tienda a cero vemos que

$$(D_{1n} - D_{2n}) A = \sigma A \quad (6.9)$$

donde σ es la densidad de carga superficial en la superficie de separación. El hecho de que, en general, σ no sea cero, introduce alguna complejidad en esta condición en la frontera; sin embargo, observando que la carga debe conservarse, esto es, que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.10)$$

se hace posible algunas simplificaciones. Si se integra esta ecuación como se hizo con 6.8 y escogemos la figura 1, se obtiene

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (6.11)$$

Si se considera únicamente la radiación monocromática, la densidad de carga superficial debe variar como $\exp(-i\omega t)$; por tanto, el segundo miembro de la ecuación 6.11 puede escribirse como $i\omega\sigma$. Utilizando las relaciones constitutivas $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ se puede poner las ecauciones 6.9 y 6.11 en la forma

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (6.12)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega\sigma \quad (6.13)$$

Puede observarse varios casos de interés práctico. Si σ es cero, entonces

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2}$$

que puede ser cierto para materiales apropiadamente elegidos o, en alternativa, si $g_1 = g_2 = 0, 0, \infty$. El caso en que ambas conductividades sean infinitas no es de gran interés; sin embargo, el caso en que ambas conductividades se anulen tienen lugar aproximadamente en la frontera entre dos dieléctricos buenos. Si σ no es cero, lo que es tal vez un caso más común, entonces puede eliminarse de las ecuaciones 6.12 y 6.13. El resultado de esta eliminación es:

$$\left(\epsilon_1 - \frac{g_1}{i\omega}\right) E_{1n} - \left(\epsilon_2 - \frac{g_2}{i\omega}\right) E_{2n} = 0 \quad (6.14)$$

La ecuación 6.14 es útil, así como está, al proporcionar una condición en la frontera; no obstante, aparece a veces al multiplicar por $\omega^2\mu_1\mu_2$, que es:

$$\mu_2\gamma_1 E_{1n} - \mu_2\gamma_2 E_{2n} = 0 \quad (6.15)$$

la constante de propagación dada por:

$$\gamma = \omega^2\epsilon\mu + i\omega g\mu \quad (6.16)$$

Un último caso interesante ocurre cuando una conductividad, digamos g_2 , es infinita. en este caso E_{2n} debe anularse y $E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$, para que 6.13 y 6.12 se satisfagan.

La condición de frontera final es la impuesta en la componente tangencial de la intensidad magnética, \mathbf{H} . Esta condición en la frontera se obtiene integrando la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (6.17)$$

sobre el área encerrada por un circuito tal como el de la figura 6.2. Si se hace esto y el circuito se escoge como antes, la condición en la frontera resultante es

$$H_{1t} - H_{2t} = K_{\perp} \quad (6.18)$$

donde K_{\perp} es la componente de la densidad superficial de corriente perpendicular al sentido de la componente de \mathbf{H} que se está confrontando. La idea de una densidad superficial de corriente es análoga a la densidad superficial de carga (representa una corriente finita en una capa infinitesimal). La densidad superficial de corriente es cero a menos que la conductividad sea infinita; en consecuencia, para conductividad finita,

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (6.19)$$

Esto es, a menos que un medio tenga conductividad infinita, la componente tangencial de \mathbf{H} es continua. Si la conductividad del medio 2 es infinita, entonces, como ya se ha demostrado, $E_{2n} = 0$. Un resultado más general puede obtenerse considerando la ecuación de Maxwell 6.17

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2 \quad (6.20)$$

Usando las relaciones constitutivas y suponiendo que \mathbf{E}_2 varía con el tiempo como $\exp(-i\omega t)$ se tiene

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \quad (6.21)$$

Si se hace la suposición razonable de que \mathbf{H}_2 sea tanto acotada como derivable, entonces la ecuación 6.21 implica que \mathbf{E}_2 sea cero en un medio de

conductividad infinita. Con las mismas suposiciones que se hicieron antes y utilizando 6.14 se obtiene

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (6.22)$$

y la anulación de \mathbf{E}_2 también implica que se anule \mathbf{H}_2 . Si \mathbf{H}_2 se anula entonces la condición en la frontera sobre la componente tangencial de \mathbf{H} en una superficie de separación en el que un medio tiene conductividad infinita es

$$H_{1t} = K_{\perp} \quad (6.23)$$

Las condiciones en la frontera necesarias para resolver los problemas considerados en este capítulo ya se han obtenido; para su conveniente consulta se dan en la tabla 6.1 para $g = 0$, $g = \infty$ y g arbitraria

TABLA 6.1
CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA LOS VECTORES
DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$ $E_{1t} = 0$	$D_{2n} = 0$ $D_{1n} = \sigma$	$H_{2t} = 0$ $H_{1t} = K_{\perp}$	$B_{2n} = 0$ $B_{1n} = 0$
$g_1, g_2 \text{ arb. } \neq \infty$	$E_{1t} = E_{2t}$	$\left(\epsilon_1 - \frac{g_1}{i\omega}\right) E_{1n} =$ $\left(\epsilon_2 - \frac{g_2}{i\omega}\right) E_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$

6.3. R. y R. en la Frontera de dos Medios no Conductores. I.N.

Se analizará ahora la reflexión y refracción (R. y R.) de ondas planas con incidencia norma (I.N.) sobre una superficie de separación de dieléctricos. Como se muestra en la figura 6.3

Aquí $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ describen la onda incidente que avanza en la dirección $+Z$, $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ describen la onda reflejada que avanza en la dirección $-Z$, y $\mathbf{E}_3, \mathbf{H}_3$ describen la onda transmitida.

La superficie de separación se toma coincidiendo con el plano XY en $z = 0$, con el medio 1 a la izquierda y el medio 2 a la derecha.

Los campos eléctricos que se polarizan en al dirección de x , se describen por

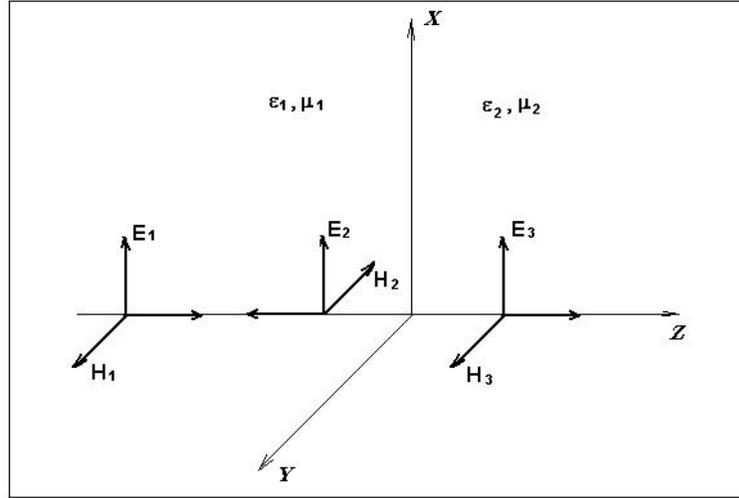


Figura 6.3: Reflexión y transmisión con incidencia normal

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \hat{\mathbf{u}}_x E_{10} \exp [i (k_1 z - \omega t)] \\ \mathbf{E}_2 &= -\hat{\mathbf{u}}_x E_{20} \exp [i (k_1 z + \omega t)] \\ \mathbf{E}_3 &= \hat{\mathbf{u}}_x E_{30} \exp [i (k_2 z - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \text{ y } k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \quad (6.25)$$

Los campos magnéticos adecuados se obtienen de la ecuación de maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.26)$$

De las ecuaciones 6.24 y 6.26 se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{u}}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_y i\omega\mu H_y \quad (6.27)$$

En consecuencia los campos magnéticos respectivos serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \hat{\mathbf{u}}_y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} \exp [i (k_1 z - \omega t)] \\ \mathbf{H}_2 &= -\hat{\mathbf{u}}_y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{20} \exp [-i (k_1 z + \omega t)] \\ \mathbf{H}_3 &= \hat{\mathbf{u}}_y \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{30} \exp [i (k_2 z - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.28)$$

Como las componentes normales de los campos se anulan, sólo las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético necesitan considerarse, y estos según la línea de conductividad cero de la tabla 6.1. Aplicando estas condiciones en $z = 0$, se ve que

$$E_{10} + E_{20} = E_{30} \text{ y } \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_{10} - E_{20}) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{30} \quad (6.29)$$

Despejando de estas ecuaciones E_{20} y E_{30} , se obtiene

$$\begin{aligned} E_{20} &= \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}} E_{10} \\ E_{30} &= \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}} E_{10} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Las ecuaciones anteriores determinan los campos eléctricos de las ondas reflejada y transmitida en función de la onda incidente y de los parámetros que describen el medio; estas amplitudes a su vez determinan las amplitudes de los campos magnéticos por las ecuaciones 6.28.

Es interesante aplicar los resultados obtenidos antes al caso de los materiales ópticamente transparentes. Para dichos materiales, μ es casi μ_0 ; en consecuencia, el índice de refracción está esencialmente dado por

$$n = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

En función de n , tomando $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, la ecuación 6.30 se convierte en

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (6.31)$$

La intensidad de la onda reflejada es proporcional al vector de Poynting reflejado, y la intensidad transmitida es proporcional al vector de Poynting transmitido. El coeficiente de reflexión R_n y el coeficiente de transmisión T_n se definen por

$$R_n = \frac{|\langle \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 \rangle|}{|\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \rangle|} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (6.32)$$

$$T_n = \frac{|\langle \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3 \rangle|}{|\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \rangle|} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (6.33)$$

la demostración de estas expresiones se deja como ejercicio.

Para una superficie típica aire-vidrio, donde $n_2 = 1,5$ y $n_1 = 1$, los coeficientes de reflexión y transmisión son

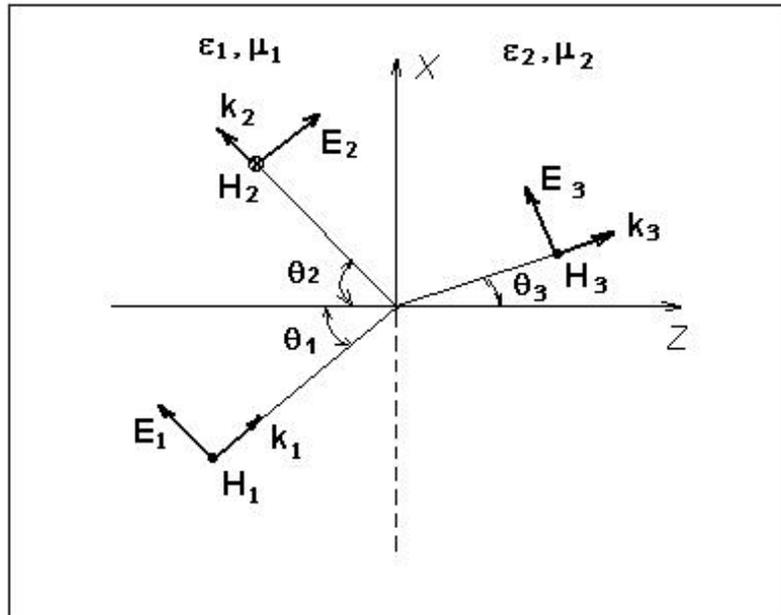


Figura 6.4: Reflexión y refracción, incidencia oblicua. El plano XZ es el plano de incidencia. Los vectores \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_3 están dirigidos fuera del papel, y \mathbf{H}_2 hacia dentro.

$$R_n = 0,04 \text{ y } T_n = 0,96$$

Por lo tanto, como sería de esperar, toda la energía incidente o bien se refleja o bien se trasmite; no hay lugar para almacenar energía en la superficie de separación.

Otro hecho interesante se obtiene al examinar la ecuación 6.31; es decir, si $n_1 > n_2$ la primera razón es positiva. Esto es precisamente el enunciado familiar de la óptica que indica que no hay cambio de fase en la reflexión en un medio “menos denso” pero hay cambio de fase de π radianes en la reflexión de un medio “más denso”.

6.4. R. y R. en la Frontera de dos Medios no Conductores. I.O.

Un caso más general es el de reflexión de ondas planas oblicuamente incidentes por una superficie de separación dieléctrica plana. La consideración de este caso conduce a tres leyes ópticas bien conocidas: ley de Snell, ley de reflexión y la ley de Brewster que rige la polarización por reflexión.

La situación general se describe en la figura 6.4. Para simplificar la siguiente deducción se ha supuesto que los vectores de propagación \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 y \mathbf{k}_3 son coplanares y están en el plano XZ . Además, también se ha supuesto que los vectores de campo eléctrico \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 y \mathbf{E}_3 están en este plano.

Puede demostrarse que los vectores de propagación son siempre coplanares. El vector de campo eléctrico más general puede descomponerse en una componente en el plano XZ (plano de incidencia) y otra perpendicular a este plano. La reflexión y la transmisión de estas dos componentes están regidas por distintas leyes. La elección anterior se hace para obtener la ley de Brewster. La deducción para el caso en que el campo eléctrico sea perpendicular al plano de incidencia se deja como ejercicio.

Para el caso que nos ocupa los campos eléctrico de las ondas incidente, reflejada y transmitida están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{10} \exp [i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{20} \exp [i (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{E}_{30} \exp [i (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\end{aligned}\quad (6.34)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{10} &= E_{10} (\hat{\mathbf{u}}_x \cos \theta_1 - \hat{\mathbf{u}}_z \sin \theta_1) \\ \mathbf{E}_{20} &= E_{20} (\hat{\mathbf{u}}_x \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{u}}_z \sin \theta_1) \\ \mathbf{E}_{30} &= E_{30} (\hat{\mathbf{u}}_x \cos \theta_3 - \hat{\mathbf{u}}_z \sin \theta_3)\end{aligned}\quad (6.35)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (\hat{\mathbf{u}}_x \sin \theta_1 + \hat{\mathbf{u}}_z \cos \theta_1) \\ \mathbf{k}_2 &= \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (\hat{\mathbf{u}}_x \sin \theta_2 - \hat{\mathbf{u}}_z \cos \theta_2) \\ \mathbf{k}_3 &= \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (\hat{\mathbf{u}}_x \sin \theta_3 + \hat{\mathbf{u}}_z \cos \theta_3)\end{aligned}\quad (6.36)$$

La intensidad magnética de cada onda puede obtenerse, como en el caso de incidencia normal, de la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{H}\quad (6.37)$$

El rotacional de la ecuación 6.37 puede evaluarse a partir de la definición de rotacional y las formas explícitas de los campos eléctricos como se dan en las ecuaciones 6.34, 6.35 y 6.36. Sin embargo, el rotacional de los vectores de la forma general de las ecuaciones 6.34 ocurren tan frecuentemente que conviene deducir una expresión general. Si \mathbf{A} es una función vectorial arbitraria, entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{A} \quad (6.38)$$

pero

$$\nabla \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.39)$$

en consecuencia

$$\nabla \times \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{A} + i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.40)$$

con esta identidad y la ecuación 6.37, y observando que cada uno de los vectores de 6.35 es constante, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_{10}}{\omega\mu_1} \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_{20}}{\omega\mu_1} \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{H}_3 &= \frac{\mathbf{k}_3 \times \mathbf{E}_{10}}{\omega\mu_2} \exp[i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Habiendo obtenido esta descripción matemática de las ondas, volvemos luego a las condiciones en la frontera, en la superficie de separación $z = 0$. Como la primera condición en la frontera que debe confrontarse, consideremos la componente tangencial (componente x) del campo eléctrico en $z = 0$. La continuidad de esta componente del campo eléctrico da (ya que $k_1 = k_2$)

$$\begin{aligned} E_{10} \cos \theta_1 \exp[i(k_1 x \sin \theta_1 - \omega t)] + E_{20} \cos \theta_2 \exp[i(k_1 x \sin \theta_2 - \omega t)] \\ = E_{30} \cos \theta_3 \exp[i(k_3 x \sin \theta_3 - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.42)$$

El factor común $\exp(-i\omega t)$ puede cancelarse de los tres términos, quedando

$$E_{10} \cos \theta_1 \exp(ik_1 x \sin \theta_1) + E_{20} \cos \theta_2 \exp(ik_1 x \sin \theta_2) = E_{30} \cos \theta_3 \exp(ik_3 x \sin \theta_3) \quad (6.43)$$

Cada término de la ecuación 6.43 depende de x a través de un factor exponencial. La única forma de que la ecuación 6.43 puede satisfacer para todos los valores de x es si los tres factores exponenciales son todos iguales, esto es, si

$$k_1 x \sin \theta_1 = k_1 x \sin \theta_2 = k_3 x \sin \theta_3 \quad (6.44)$$

Este resultado puede dividirse en dos ecuaciones:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2, \quad k_1 \sin \theta_1 = k_3 \sin \theta_3 \quad (6.45)$$

La primera de éstas ecuaciones equivale claramente a $\theta_1 = \theta_2$, que es la ley de reflexión. Como $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ y $n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$, la segunda ecuación puede escribirse como $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, que es la ley de Snell. Por tanto, se han obtenidos resultados importantes al aplicar la condición en la frontera sobre la componente tangencial del campo eléctrico. En esta condición en la frontera está contenida más información, como puede verse al utilizar la ecuación 6.44 en la ecuación 6.43 y suprimir factores comunes para obtener:

$$E_{10} \cos \theta_1 + E_{20} \cos \theta_1 = E_{30} \cos \theta_3 \quad (6.46)$$

La ecuación 6.46 tiene que ser satisfecha por E_{10} , E_{20} y E_{30} ; además hay otras dos condiciones, obtenidas de la continuidad de la componente normal del desplazamiento eléctrico y de la continuidad que tiene la componente tangencial de la intensidad magnética. Entonces para el desplazamiento se tiene:

$$-\epsilon_1 \sin \theta_1 E_{10} + \epsilon_1 \sin \theta_1 = -\epsilon_2 \sin \theta_3 E_{30} \quad (6.47)$$

mientras que para la intensidad magnética dá:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{20} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{30} \quad (6.48)$$

Estas dos ecuaciones son realmente idénticas, como puede verse al escribir la ecuación 6.47 en la forma

$$-\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_1 E_{10} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_1 E_{20} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_3 E_{30} \quad (6.49)$$

como $\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = n_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, la ley de Snell hace posible la reducción de la ecuación 6.49 a la forma 6.48.

Ahora deben despejarse de las ecuaciones 6.46 y 6.47 E_{20} y E_{30} en función de E_{10} . Esto se hace facilmente, con el resultado

$$\frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3} \quad (6.50)$$

para el campo eléctrico transmitido y

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}{\epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3} \quad (6.51)$$

para el campo de la onda reflejada. En la mayoría de los materiales dieléctricos $\mu = \mu_0$ y $n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$. suponiendo que éste sea el caso y utilizando la ley de Snell, la ecuación 6.51 se convierte en:

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{\sin \theta_3 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_3 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_1} \quad (6.52)$$

Las identidades trigonométricas $\sin(\theta_1 + \theta_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) = \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_3 \cos \theta_3$ y $\sin(\theta_1 - \theta_3) \cos(\theta_1 + \theta_3) = \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_3 \cos \theta_3$ reducen la ecuación 6.52 a

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = -\frac{\tan(\theta_1 - \theta_3)}{\tan(\theta_1 + \theta_3)} \quad (6.53)$$

Si $\theta_1 = \theta_3$, entonces $\tan(\theta_1 - \theta_3) = 0$ y no hay onda reflejada. Desafortunadamente, esto puede tener lugar sólo si $n_1 = n_2$, esto es, si los dos medios son ópticamente indistinguibles. Si por otra parte, $\theta_1 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$, entonces $\tan(\theta_1 + \theta_3)$ es infinita y la amplitud de la onda reflejada es nuevamente cero. En este caso, los medios son ópticamente distinguibles. Como puede demostrarse que la otra polarización, \mathbf{E} perpendicular al plano de incidencia, se refleja parcialmente, la luz no polarizada que incide con un ángulo que satisfaga $\theta_1 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ se polarizará por reflexión. La ley de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_3$, proporciona un medio para determinar el valor de θ_1 . Usando $\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ en la ley de Snell, se tiene $n_1 \sin \theta_{1p} = n_2 \cos \theta_{1p}$ o

$$\tan \theta_{1p} = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.54)$$

La cantidad θ_{1p} se conoce como ángulo de Brewster; la relación entre éste y los índices de refracción, como se da en la ecuación 6.54 se conoce como la ley de Brewster.

Las ecuaciones 6.50 y 6.51 son del conjunto conocido como **ecuaciones de Fresnel**, que en su totalidad describen la reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas de dos polarizaciones posibles en una superficie de separación plana de dieléctricos.

De estas ecuaciones es sencillo obtener los coeficientes de reflexión y transmisión para la potencia; las cuales son

$$R = \frac{|\langle \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 \rangle|}{|\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \rangle|} = \left(\frac{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1} \right)^2 \quad (6.55)$$

y

$$T = \frac{|\langle \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3 \rangle|}{|\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \rangle|} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}} \left(\frac{2\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\epsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \epsilon_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1} \right)^2 \quad (6.56)$$

para una onda polarizada como la estudiada antes. Si los medios son dieléctricos con $\mu = \mu_0$ y en consecuencia $n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, entonces estas ecuaciones pueden ponerse en las formas

$$R = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_3)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_3)} \quad (6.57)$$

$$T = \frac{4 \sin \theta_3 \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_3) \cos^2(\theta_1 - \theta_3)} \quad (6.58)$$

en cuyas formas dan las razones de las intensidades transmitidas y reflejada a la intensidad incidente. Como están escritas, las ecuaciones no parecen contener los índices de refracción; sin embargo, debe recordarse que θ_1 y θ_3 se relacionan por la ley de Snell.

6.5. Reflexión en un Plano Conductor. I.N.

Consideremos ahora la reflexión y transmisión de las ondas planas que inciden normalmente a una superficie plana entre un material conductor y uno no conductor. la situación es esencialmente la descrita por la figura 6.3, con la característica adicional de que g_2 , la conductividad del medio 2, no es cero. Los campos eléctrico y magnético \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 , \mathbf{E}_2 y \mathbf{H}_2 tienen las formas dadas por las ecuaciones 6.24 y 6.28, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \hat{\mathbf{u}}_x E_{10} \exp [i(k_1 z - \omega t)], & \mathbf{H}_1 &= \hat{\mathbf{u}}_y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} \exp [i(k_1 z - \omega t)] \\ \mathbf{E}_2 &= \hat{\mathbf{u}}_x E_{20} \exp [-i(k_1 z + \omega t)], & \mathbf{H}_2 &= -\hat{\mathbf{u}}_y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{20} \exp [-i(k_1 z + \omega t)] \end{aligned} \quad (6.59)$$

La onda en el medio conductor tiene la forma

$$\mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{u}}_x E_{30} \exp [i(\gamma_2 z - \omega t)], \quad \mathbf{H}_3 = \hat{\mathbf{u}}_y \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} E_{30} \exp [i(\gamma_2 z - \omega t)] \quad (6.60)$$

γ_2 está dada, sin embargo, por

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 + i\omega g_2 \mu_2} \quad (6.61)$$

como en la ecuación 6.16. Alfa y beta están dadas por

$$\alpha = \mp \sqrt{\epsilon\mu} \left[\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{\omega g \mu}{2\alpha} \quad (6.62)$$

Nuevamente, las condiciones apropiadas en la frontera son continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} . Los resultados son

$$E_{10} + E_{20} = E_{30} \quad (6.63)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_{10} - E_{20}) = \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} E_{30} \quad (6.64)$$

Como γ_2 es compleja, E_{20} y E_{30} no pueden ser ambas reales; este hecho indica que son posibles los corrimientos de fase distintos de cero y π para las ondas reflejadas y transmitida. Formalmente, las ecuaciones 6.63 y 6.64 pueden resolverse para dar

$$\begin{aligned} E_{20} &= \frac{1 - \left(\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{10} \\ E_{30} &= \frac{2}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{10} \end{aligned} \quad (6.65)$$

La semejanza aparente de estos resultados con los obtenidos en el caso de dieléctricos es engañosa, puesto que nuevamente debe observarse que γ_2 es un número complejo y, por tanto, da origen a corrimientos de fase.

El caso especial de conductividad infinita es particularmente simple. en este caso γ_2 es infinito, reduciendo así las ecuaciones 6.65 a

$$E_{20} = -E_{10}, \quad E_{30} = 0 \quad (g_2 = \infty) \quad (6.66)$$

de modo que toda la energía incidente se refleja y no penetra energía en el conductor. el caso general es bastante engoroso; sin embargo, la siguiente aproximación para buenos conductores es relativamente directa y tiene alguna utilidad. Para buen conductor

$$\frac{g_2}{\omega \epsilon_2} \gg 1$$

En este caso,

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\omega g_2 \mu_2}{2}} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{\omega g_2 \mu_2}{2}} \quad (6.67)$$

La amplitud del campo eléctrico reflejada está dada por

$$E_{20} = \frac{1 - \left(\frac{1+i}{\omega\mu_2}\right) \sqrt{\frac{\omega g_2 \mu_2}{2} \frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \left(\frac{1+i}{\omega\mu_2}\right) \sqrt{\frac{\omega g_2 \mu_2}{2} \frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{10} = \frac{1 - (1+i) \sqrt{\frac{\mu_1 g_2}{2\mu_2 \epsilon_1 \omega}}}{1 + (1+i) \sqrt{\frac{\mu_1 g_2}{2\mu_2 \epsilon_1 \omega}}} E_{10} \quad (6.68)$$

Si junto con la ecuación 6.68 tenemos $\frac{g_2}{\omega\epsilon_1} \gg 1$, entonces los radicales de la ecuación 6.68 son partes dominantes del numerador y del denominador. Dividiendo numerador y denominador por $(1+i)$ veces el radical, se tiene

$$E_{20} = -\frac{1 - \frac{(1-i)}{2} \sqrt{2 \frac{\mu_2 \omega \epsilon_1}{\mu_1 g_2}}}{1 + \frac{(1-i)}{2} \sqrt{2 \frac{\mu_2 \omega \epsilon_1}{\mu_1 g_2}}} E_{10} \quad (6.69)$$

El reconocimiento del radical como una pequeña cantidad nos conduce a la aproximación

$$E_{20} = -\left[1 - (2-i) \sqrt{2 \frac{\mu_2 \omega \epsilon_1}{\mu_1 g_2}}\right] E_{10} \quad (6.70)$$

El coeficiente de reflexión se obtiene comparando el vector de Poynting reflejado con el vector de Poynting incidente. Como ambas ondas, la incidente y la reflejada, están en el mismo medio, esto equivale a comparar el cuadrado de la magnitud de E_{20} con el cuadrado de la magnitud de E_{10} . Por tanto

$$R = \frac{|E_{20}|^2}{|E_{10}|^2} \quad (6.71)$$

Utilizando la aproximación dada en 6.70, se obtiene

$$R = \left[1 - (1-i) \sqrt{2 \frac{\mu_2 \omega \epsilon_1}{\mu_1 g_2}}\right] \left[1 - (1+i) \sqrt{2 \frac{\mu_2 \omega \epsilon_1}{\mu_1 g_2}}\right] \quad (6.72)$$

con la misma aproximación que se usó antes, se ve que

$$R = 1 - 2 \sqrt{2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(\frac{\omega \epsilon_1}{g_2}\right)} \quad (6.73)$$

tomado $g_2 = 5,6 \times 10^7 \frac{mhos}{m}$, el valor par el cobre, y suponiendo que $\mu_2 = \mu_1$ y $\epsilon_1 = \epsilon_0$, se ve que para $f = 10^7 Hz$ (longitud de onda 3 cm) $R = 0,9997$;

para frecuencias más bajas, la situación es aún más cercana al caso de reflexión perfecta. Sólo para la radiación de longitudes de onda muy cortas la desviación de R de la unidad es importante en conductores buenos como el cobre, la plata y el aluminio. Como la penetración de Skin para estos materiales es pequeña, es fácil ver que las capas delgadas de buenos conductores proporciona un blindaje excelente para radiofrecuencias.

Apéndice A

Expresiones Matemáticas Importantes

Para el desarrollo del curso son necesarios algunos conocimientos de Análisis Vectorial, que se resumen a continuación

A.1. Gradiente

Sea $\Psi(\mathbf{r})$ un campo escalar, el gradiente de Ψ en las diferentes coordenadas es:

Coordenadas rectangulares: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x, y, z)$

$$\nabla\Psi = \hat{\mathbf{u}}_x \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \hat{\mathbf{u}}_y \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \hat{\mathbf{u}}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas cilíndricas: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(R, \phi, z)$

$$\nabla\Psi = \hat{\mathbf{u}}_R \frac{\partial\Psi}{\partial R} + \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{u}}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

Coordenadas esféricas: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(r, \theta, \phi)$

$$\nabla\Psi = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Divergencia

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ un campo vectorial, la divergencia de \mathbf{F} en las diferentes coordenadas es:

Coordenadas rectangulares: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.4})$$

Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(R, \phi, z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R F_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

Coordenadas esféricas: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.6})$$

A.3. Rotacional

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ un campo vectorial, el rotacional de \mathbf{F} en las diferentes coordenadas es:

Coordenadas rectangulares: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{u}}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{u}}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{u}}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.7})$$

Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(R, \phi, z)$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{u}}_R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{u}}_\phi \left(\frac{\partial F_R}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial R} \right) + \hat{\mathbf{u}}_z \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R F_\phi) - \frac{\partial F_R}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.8})$$

Coordenadas esféricas: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \hat{\mathbf{u}}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\mathbf{u}}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.4. Laplaciano

Sea $U(\mathbf{r})$ un un campo escalar o campo vectorial.

Coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

Coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \quad (\text{A.12})$$

Atendiendo a ciertas propiedades que cumple el operador ∇ a continuación se dan algunas idéntidades:

$$\nabla(\Phi + \Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \cdot (\Phi\mathbf{F}) = \Phi\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla\Phi \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{F}) = \Phi\nabla \times \mathbf{F} + \nabla\Phi \times \mathbf{F} \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (\text{A.23})$$

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{A.24})$$

A continuación se dan dos teoremas muy utilizados en este curso

A.5. Teorema de la Divergencia

La integral de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sobre un volumen V es igual a la integral cerrada de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie S que limita al volumen V

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dv = \iint_{\text{cerrada } S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (\text{A.25})$$

A.6. Teorema de Stokes

La integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ alrededor de una curva cerrada C es igual a la integral de la componente normal de su rotacional sobre cualquier superficie S limitada por la curva C .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (\text{A.26})$$

Bibliografía

- [1] Wangsness Roald K. Introduction to Theoretical Physics. Classical Mechanics and Electrodynamics. John Wiley & Sons. New York. 1963.
- [2] Reitz John R., Milford Frederick J., Christy Robert W. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. Cuarta edición. Addison Wesley Iberoamericana S.A. México 1996.
- [3] Wangsness Roald K. Campos Electromagnéticos. Editorial Limusa S.A., México. 1999.
- [4] Tralli Nunzio. Classical Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Company, Inc. Tokyo. 1963.
- [5] Levich B. G. Curso de física Teórica. Volumen 1. Teoría del campo Electromagnético. Teoría de la Relatividad. Editorial reverté. S.A. Barcelona. España, 1974.
- [6] Sadiku Matthew N.O. Electromagnetismo. Segunda edición. CECSA. México, 1998.

Agradecimientos

Al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad del Atlántico por permitir la publicación de estas Notas de clase para el uso en los Progrmas de Física y Especialización en Física General.